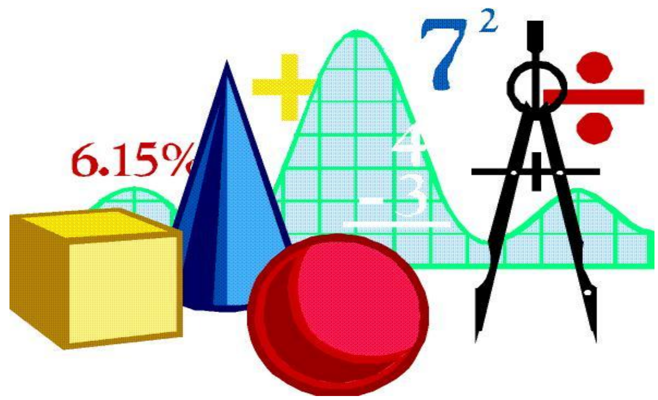
TÓM TẮT KIẾN THỨC VÀ CÔNG THỨC GIẢI NHANH TOÁN 12



SƯU TẦM & BIÊN SOẠN: NHPA

GOOD LUCK TO YOU

MỤC LỤC

Nguyễn Chiến - Nguyễn Hồng Quân

PHẦN 1. HÀM SỐ

SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ *(K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng).*

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow y = f(x)$ **đồng biến** trên K đồ thị ***đi lên*** từ trái sang phải.

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow y = f(x)$ **nghịch biến** trên K đồ thị ***đi xuống*** từ trái sang phải.

Chú ý: + Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **không đổi** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \ge 0,\ \forall x \in (a;b)$.

+ Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$.

2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm

Quy tắc tính đạo hàm: Cho $u = u(x);\ v = v(x);\ C$: là hằng số .

Tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Tích: $(u.v)' = u'.v + v'.u \Rightarrow (C.u)' = C.u'$.

Thương: $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \ne 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C.u'}{u^2}$

Đạo hàm hàm hợp: Nếu $y = f(u),\ u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

Bảng công thức tính đạo hàm:

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$ (C là hằng số).	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\ (x \ne 0)$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}\ (u \ne 0)$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\ (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a\lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}. \quad ; \quad \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}.$$

Đạo hàm cấp 2 :

+ *Định nghĩa:* $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$

+ *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là:

$a(t_0) = f''(t_0)$.

* **<u>Một số chú ý:</u>**

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x)-g(x)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên K.
- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a;b)$ và $u(x) \in (c;d)$. Hàm số $f\left[u(x)\right]$ cũng xác định với $x \in (a;b)$.

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

+ Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.

+ Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Chú ý:

* Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ thì dấu "=" khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.

Giả sử $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'\left(x\right) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f'\left(x\right) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.	$\Leftrightarrow f'\left(x\right) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a = b = c = 0$ thì $f\left(x\right) = d$

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

** Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:*

+<u>Bước 1</u>: Tính $y' = f'\left(x;m\right) = ax^2 + bx + c.$

+<u>Bước 2</u>: Hàm số đơn điệu trên $\left(x_1;x_2\right) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad \left(*\right)$$

+<u>Bước 3</u>: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

$$\Leftrightarrow \left|x_1 - x_2\right| = l \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = l^2 \quad \left(**\right)$$

+<u>Bước 4</u>: Giải $\left(*\right)$ và giao với $\left(**\right)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$.

+ x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0 sao cho $\left(a;b\right) \subset K$ và $f\left(x\right) > f\left(x_0\right), \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

+ x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0 sao cho $\left(a;b\right) \subset K$ và $f\left(x\right) < f\left(x_0\right), \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.

+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.

+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số.*

+ Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

+ Đạo hàm $f'(x)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
+ Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
+ Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0)=0$. Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

+ Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

<u>Quy tắc tìm cực trị</u>

Quy tắc 1:

+ *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
+ *Bước 2:* Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;...)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm.*
+ *Bước 3:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3: Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$.

+ Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
+ Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

+ *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
+ *Bước 2:* Tìm các nghiệm x_i $(i = 1;2;...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
+ *Bước 3:* Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
    * Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
    * Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

I. CỰC TRỊ CỦA HÀM ĐA THỨC BẬC BA:

1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Phương pháp:

+ ***Bước 1:***
  * Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
  * Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$
+ ***Bước 2:***

Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

+ ***Bước 3:*** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Bước 4: Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

Bước 5: Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

*** Chú ý:*** Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	*Kết luận*
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➢ ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.***

▪ *Hàm số có 2 cực trị trái dấu*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

▪ *Hàm số có hai cực trị cùng dấu*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

▪ *Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'}>0 \\ S=x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}<0 \\ P=x_1.x_2=\dfrac{C}{A}>0 \end{cases}$

➢ ***Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1,x_2 thỏa mãn:***

$$\left[\begin{array}{l} x_1<\alpha<x_2 \\ x_1<x_2<\alpha \\ \alpha<x_1<x_2 \end{array}\right.$$

- Hai cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<\alpha<x_2$

$$\Leftrightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)<0 \Leftrightarrow x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2<0$$

- Hai cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<\alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0 \\ x_1+x_2<2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0 \\ x_1+x_2<2\alpha \end{cases}$$

- Hai cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $\alpha<x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0 \\ x_1+x_2>2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0 \\ x_1+x_2>2\alpha \end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng

khi có 1 nghiệm là $x=\dfrac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x=-\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.

2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$.

Nếu $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)<0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ.

Nếu $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)>0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.

Một số trường hợp đặc biệt:

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Oy*

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 2 phía đối với trục Oy*

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT}>0$

Đặc biệt:

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía trên đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \end{cases}$

Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía dưới đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \end{cases}$.

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

(*áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số*)

Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (*áp dụng khi nhẩm được nghiệm*)

3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

$\boxed{g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = 9ay - \frac{y'.y''}{2}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = y - \frac{y'.y''}{3y'''}}$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \text{ với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN NHỚ

+Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0.$

+Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0.$

+Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

+Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

+Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.

+Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

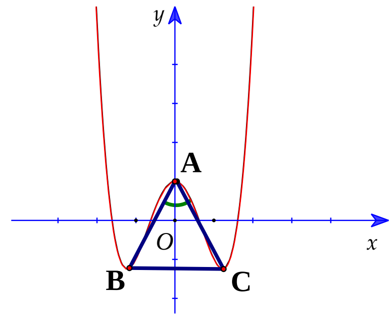
Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện: $ab < 0$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC GIẢI NHANH

Đặt : $\widehat{BAC} = \alpha$

Tổng quát: $\boxed{\cot^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{-b^3}{8a}}$



Dữ kiện	Công thức thỏa mãn $ab < 0$
Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = 8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = 24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r = \dfrac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{b^3}{8a}}\right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \dfrac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \dfrac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \dfrac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $x^2 + y^2 - \left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}\right) = 0$	

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I. Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

+ Số M gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.

+ Số m gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN

* Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

+ *Bước 1*: Tính $f'\left(x\right)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ mà tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.

+ *Bước 2*: Lập bảng biến thiên và rồi suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

* Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

+ *Bước 1*:

  ∗ Hàm số đã cho $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

  ∗ Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $\left(a;b\right)$, tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc $f'\left(x\right)$

không xác định.

+ *Bước 2*: Tính $f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right), f\left(b\right)$.

+ *Bước 3*: Khi đó:

  ∗ $\max\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right) = \max\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)\right\}$.

  ∗ $\min\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right) = \min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)\right\}$.

* Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

∗ *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.

∗ *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

∗ *Bước 3.* Tính $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

∗ *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

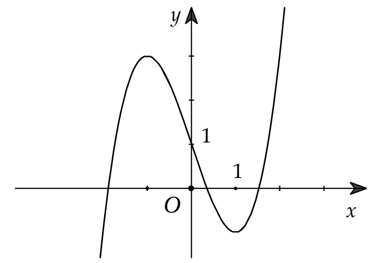
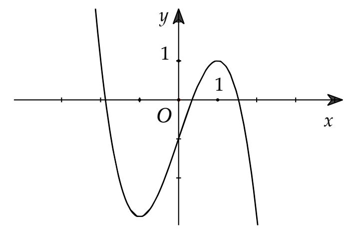
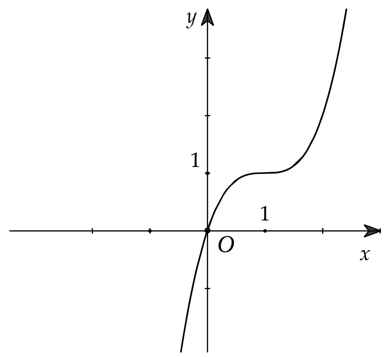
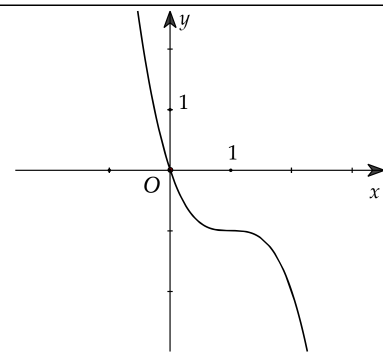
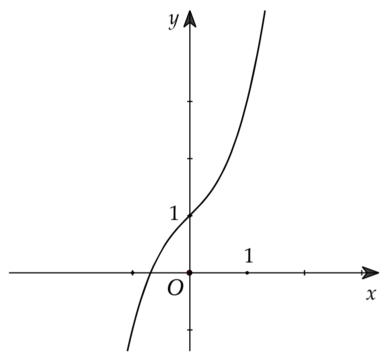
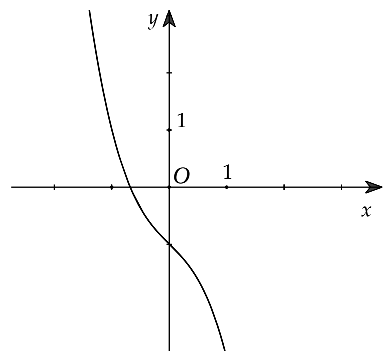
Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

+ Nếu $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(a\right) \\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(b\right) \end{cases}$.

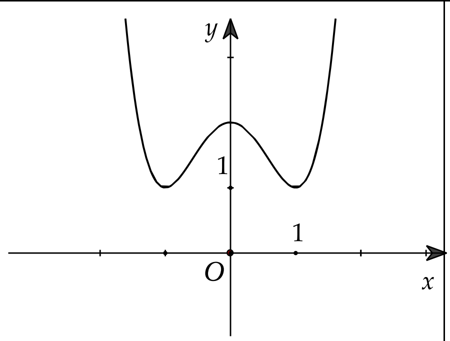
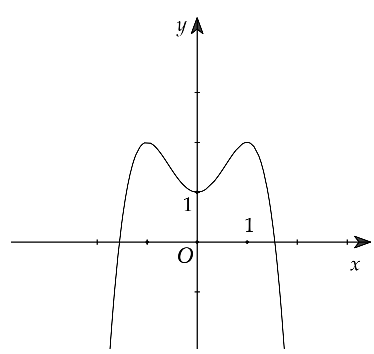
+ Nếu $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{\left[a;b\right]} f(x) = f\left(b\right) \\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f(x) = f\left(a\right) \end{cases}$.

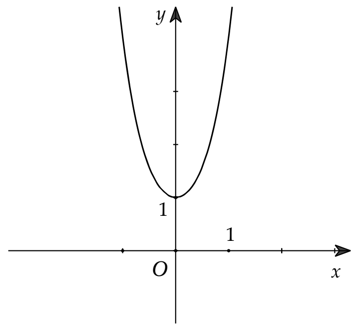
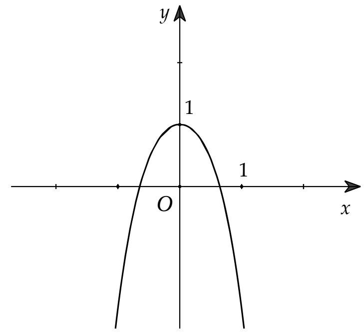
2. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC:

a) HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

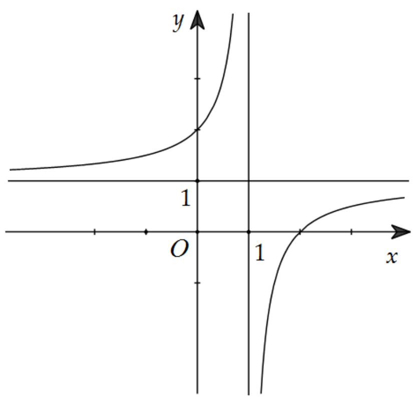
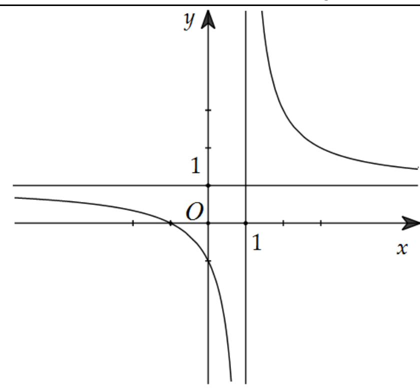
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có nghiệm kép*		
Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

b) HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt*		

<table>
<tr>
<td>Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

c) HÀM SỐ NHẤT BIẾN $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$

<table>
<tr>
<th>$D = ad - bc > 0$</th>
<th>$D = ad - bc < 0$</th>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Dạng 1: Từ đồ thị $\left(C\right) : y = f\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right) : y = f\left(\left|x\right|\right)$.

Ta có $y = f\left(\left|x\right|\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & khi \quad x \geq 0 \\ f\left(-x\right) & khi \quad x < 0 \end{cases}$

và $y = f\left(\left|x\right|\right)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị $\left(C'\right)$ nhận *Oy* làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$:**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải *Oy* của đồ thị $\left(C\right) : y = f\left(x\right)$.

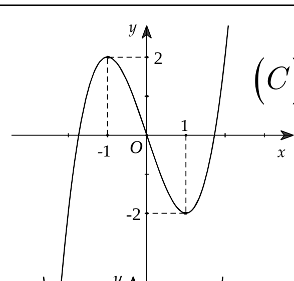
+ *Bỏ* phần đồ thị bên trái *Oy* của $\left(C\right)$, **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

Ví dụ: Từ đồ thị $\left(C\right) : y = f\left(x\right) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $\left(C'\right) : y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$.

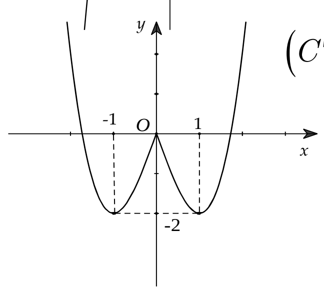
Biến đổi $\left(C\right)$:

+ Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ bên trái Oy, giữ nguyên $\left(C\right)$ bên phải Oy.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.



$\left(C\right) : y = x^3 - 3x$



$\left(C'\right) : y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$

Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

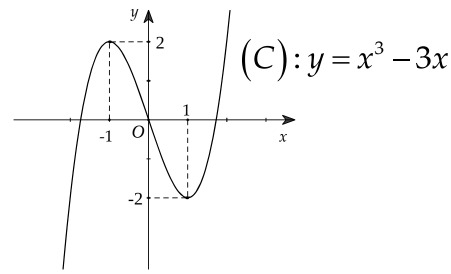
Nội dung: Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & khi\ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & khi\ \ f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị phía trên Ox</u> của đồ thị (C): $y = f(x)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị <u>phía dưới Ox</u> của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

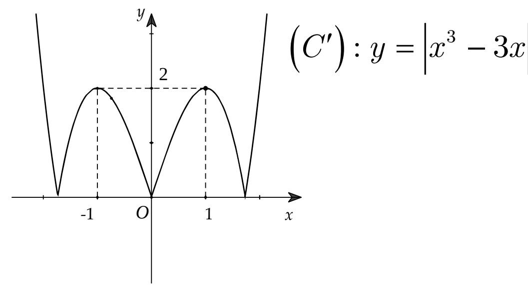
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.



Biến đổi (C):

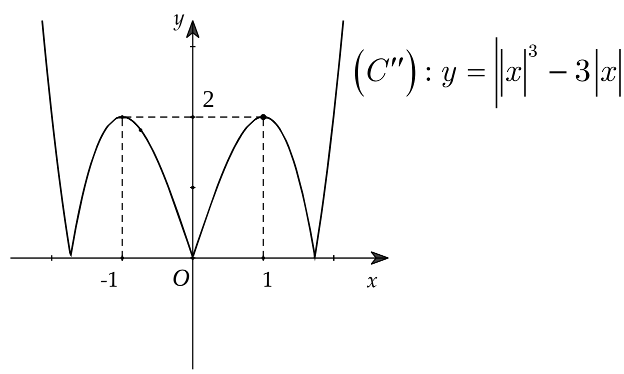
+ Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$. Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



Dạng 3: Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

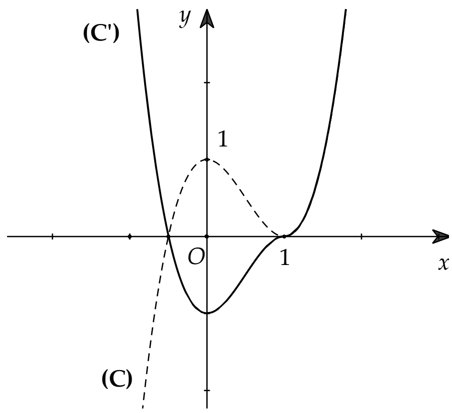
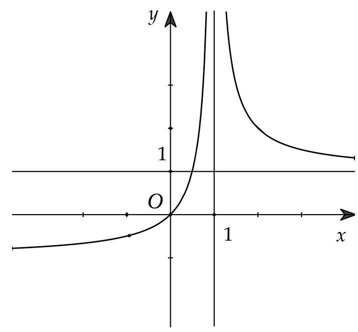
Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị <u>trên miền</u> $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Ví dụ

a) Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = \left\|x-1\right\|\left(2x^2 - x - 1\right)$	b) Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = \dfrac{x}{\left\|x-1\right\|}$
$y = \left\|x-1\right\|\left(2x^2-x-1\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & khi\ x \ge 1 \\ -f\left(x\right) & khi\ x < 1 \end{cases}$ <u>Đồ thị (C'):</u> + Giữ nguyên (C) với $x \ge 1$. + Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.  <u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox*, *Oy*, CĐ, CT…	$y = \dfrac{x}{\left\|x-1\right\|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in \left(1;+\infty\right) \\ -\dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in \left(-\infty;1\right) \end{cases}$. <u>Đồ thị (C'):</u> + Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ với $x < 1$, giữ nguyên $\left(C\right)$ với $x > 1$. + Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.  <u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

TIẾP TUYẾN

1. <u>Tiếp tuyến :</u> Cho hàm số $y = f\left(x\right)$, có đồ thị (*C*). **Tiếp tuyến** của đồ thị (*C*) tại điểm $M_0\left(x_0;y_0\right) \in \left(C\right)$ có dạng: $\boxed{y = y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) + y_0}$.

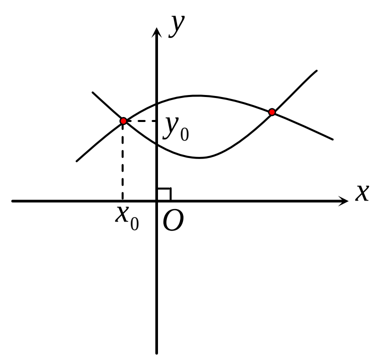
Trong đó: Điểm $M_0\left(x_0;y_0\right) \in \left(C\right)$ được gọi là *tiếp điểm*. (với $y_0 = f\left(x_0\right)$).

$k = f'\left(x_0\right)$ là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

2. <u>Điều kiện tiếp xúc</u>: Cho hai hàm số $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ và $\left(C'\right): y = g\left(x\right)$

Đồ thị $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ tiếp xúc nhau *khi chỉ khi* hệ phương trình: $\begin{cases} f\left(x\right) = g\left(x\right) \\ f'\left(x\right) = g'\left(x\right) \end{cases}$ có nghiệm.

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ



Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2). Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x)$ $\left(1\right)$. Khi đó:

+Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm của phương trình (1).

+Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.

+Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.

+Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x,m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

* **Phương pháp giải:**

+ *Bước 1:* Đưa phương trình $y = f(x,m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am + B = 0$ hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$.

+ *Bước 2:* Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

+ *Bước 3:* Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

* **Phương pháp giải:**

+ *Bước 1:* Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.

+ *Bước 2:* Lập luận để giải bài toán.

3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.

+ Ta có $\begin{cases} a+b=2x_I \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Trường hợp đặc biệt : *Cho đồ thị $\left(C\right): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Trên đồ thị $\left(C\right)$ tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M\left(a,Aa^3+Ba^2+Ca+D\right),N\left(b,Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

+ Ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=0 \end{cases}$.

+ Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M,N.

Bài toán 3: *Cho đồ thị $\left(C\right): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ trên đồ thị $\left(C\right)$ tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=A_1x+B_1$.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M\left(a;Aa^3+Ba^2+Ca+D\right)$, $N\left(b;Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng d.

+ Ta có: $\begin{cases} I\in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d}=0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d). Giải hệ phương trình tìm được M, N.

4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách

❖ Lý thuyết:

+ Cho hai điểm $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right) \Rightarrow AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h\left(M;d\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

+ Cho hàm phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại M cắt $TCĐ$, TCN ở A và B thì M là trung điểm của AB.

Diện tích tam giác IAB không đổi: $S_{IAB}=\dfrac{2}{c^2}\left|ad-bc\right|$.

❖ Các bài toán thường gặp:

Bài toán 1: *Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.*

* **Phương pháp giải:**

+ $\left(C\right)$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α,β là hai số dương.

+ Nếu A thuộc nhánh trái: $x_A < -\frac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\frac{d}{c} - \alpha < -\frac{d}{c}$; $y_A = f(x_A)$.

+ Nếu B thuộc nhánh phải: $x_B > -\frac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\frac{d}{c} + \beta > -\frac{d}{c}$; $y_B = f(x_B)$.

+ Sau đó tính: $AB^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = \left[\left(a+\beta\right) - \left(a-\alpha\right)\right]^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$.

+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số $\left(C\right)$ có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M\left(x;y\right)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = \left|x\right| + \left|y\right|$.
+ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
+ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
+ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

* **Phương pháp giải:**

Theo đầu bài ta có $\left|y\right| = k\left|x\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = kx \\ y = -kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = kx \\ f\left(x\right) = -kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

* **Phương pháp giải:**

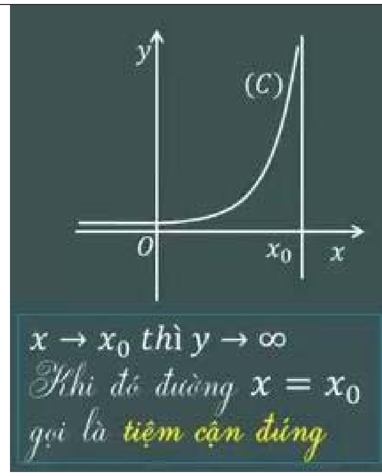
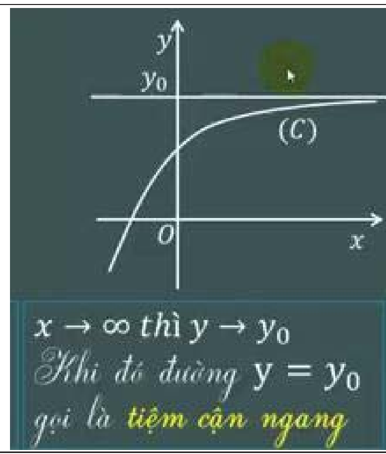
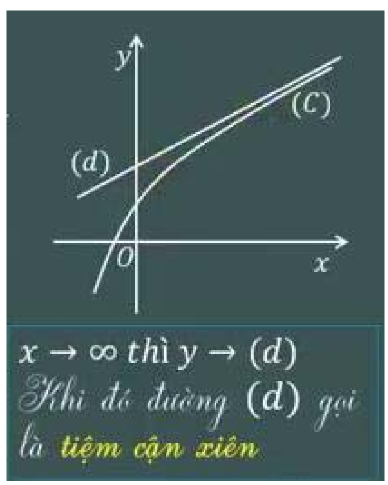
+ Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
+ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
+ Gọi $M\left(x_M; y_M\right)$ là điểm cần tìm. Khi đó: $IM^2 = \left(x_M + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \frac{a}{c}\right)^2 = g\left(x_M\right)$
+ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I\left(x_0; y_0\right)$; $y_0 = f(x_0)$.
+ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h\left(I; d\right) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
+ Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Khái niệm	**Hình ảnh minh hoạ**	**Phương pháp tìm tiệm cận**
1. Tiệm cận đứng: *Đường thẳng* $x = x_0$ *(vuông góc Ox) gọi là tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số: y=f(x) Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,$		B1. Tìm tập xác định B2. Tìm các giá trị x_0 mà tại x_0 hàm số: y=f(x) không xác định. B3. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0^+} y = \pm\infty$ & $\lim\limits_{x\to x_0^-} y = \pm\infty$ B4. Kết luận.
2. Tiệm cận ngang Hàm số $y = f(x)$ *xác định trên một khoảng vô hạn* (có thể là $(-\infty;a),(b;+\infty),(-\infty;+\infty)$ *Đường thẳng* $y = y_0$ *(vuông góc Oy) gọi là tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số: y=f(x) Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$		B1. Tìm tập xác định B2. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = y_0$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} y = y_0$ B3. Kết luận
3. Tiệm cận xiên Hàm số $y = f(x)$ *xác định trên một khoảng vô hạn* (có thể là $(-\infty;a),(b;+\infty),(-\infty;+\infty)$ *Đường thẳng* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *gọi là tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số: y=f(x) Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0.$		B1. Tìm tập xác định B2. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - ax\right) = b$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - ax\right) = b$ B3. Kết luận

Chú ý:

1. Hàm số: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là: $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang là: $y = \frac{a}{c}$

2.Hàm số: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx+n} = px + q + \frac{k}{mx+n}$ có tiệm cận đứng là: $x = -\frac{n}{m}$, tiệm cận xiên là: $y = px + q$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \left[\begin{array}{l} n \le m : TCĐ \,\&\, TCN \\ n > m : TCĐ \,\&\, TCX \end{array}\right.$

4. Hàm số: $y = f(x) = \sqrt{\text{ax}^2 + bx + c}$ $\left(a > 0\right)$ có tiệm cận xiên là $y = \sqrt{a}\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|$

5. Hàm số: $y = f(x) = mx + n + p\sqrt{\text{ax}^2 + bx + c}$ $\left(a > 0\right)$ có tiệm cận xiên là

$y = mx + n + p\sqrt{a}\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|$

6. Hàm số: $y = \dfrac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ chỉ có tiệm cận ngang, có thể có tiệm cận đứng nếu $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Bổ sung một số kiến thức:

- ***Công thức khoảng cách***: Đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \ne 0)$ và $M\left(x_0; y_0\right)$.

Khoảng cách từ M đến Δ là: $d\left(M, \Delta\right) = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Đặc biệt: - Đường thẳng $\Delta : y = m$ thì $d\left(M, \Delta\right) = \left|y_0 - m\right|$

- Đường thẳng $\Delta : x = n$ thì $d\left(M, \Delta\right) = \left|x_0 - n\right|$

- ***Công thức giới hạn***:

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{C}{x^k} = 0 \;\; với\left(k > 0\right)$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \left[\begin{array}{l} +\infty \;\; n\, chẵn \\ -\infty \;\; n\; lẻ \end{array}\right.$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \;\; với\, n \in N$

+ Giới hạn một bên: $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{c}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} +\infty \;\; Nếu\;\; c > 0 \\ -\infty \;\; Nếu\;\; c < 0 \end{array}\right.$ & $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{c}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} -\infty \;\; Nếu\;\; c > 0 \\ +\infty \;\; Nếu\;\; c < 0 \end{array}\right.$

5. TƯƠNG GIAO HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

5.1. Kiến thức

Cho hai đường cong: $\left(C_1\right) : y = f(x)$ và $\left(C_2\right) : y = g(x)$

+) Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm chung của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right) \Leftrightarrow M\left(x_0; y_0\right)$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

+ Hoành độ giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ là nghiệm của phương trình: $f(x) = g(x)$ (*)

+) Số nghiệm phương trình (*) bằng số giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$

5.2 . Bổ sung một số kiến thức

a) Phương trình bậc 2

-Phương trình: $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $\left(a \ne 0\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(x_0) \ne 0 \end{cases}$

-Phương trình: $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $\left(a \ne 0\right)$ có nghiệm kép khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \ne 0 \end{cases}$

-Phương trình: $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $\left(a \ne 0\right)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

b) Phương trình bậc 3 hay tương giao đồ thị hàm đa thức bậc ba và trục Ox

Tương giao của đồ thị hàm bậc 3 $y = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ $(a' \neq 0)$ *và trục Ox:*

Phương trình hoành độ giao điểm: $a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$

Trường hợp 1*: Biến đổi phương trình:* $a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ *thành* $(x-\alpha)(ax^2 + bx + c) = 0$

- Phương trình: $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình:

  $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt khác α .
- Phương trình: $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình:

  $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép khác α hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một

  nghiệm bằng α $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(\alpha) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- Phương trình: $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ chỉ có một nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình:

  $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép bằng α hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \\ \Delta < 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Không nhẩm được nghiệm α

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ và Ox bằng số nghiệm của phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- *Chỉ có một nghiệm* khi và chỉ khi*:* Hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến; hoặc có hai cực trị nằm về cùng một phía đối với Ox$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{y'} \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y(x_1).y(x_2) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ trong đó: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $y' = 0$
- *Chỉ có hai nghiệm* khi và chỉ khi hàm số có hai cực trị, trong đó có một cực trị nằm trên Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y(x_1).y(x_2) = 0 \end{cases}$ trong đó: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $y' = 0$
- *Chỉ có ba nghiệm phân biệt* khi và chỉ khi hàm số có hai cực trị, trong đó có hai cực trị nằm về hai phía của trục Ox$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y(x_1).y(x_2) < 0 \end{cases}$ trong đó: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

  $y' = 0$

Bổ sung: Phương trình đường thẳng qua hai cực trị (nếu có) là $y = mx + n$ (Biểu thức $mx + n$ là đa thức dư khi chia y cho y').

Xét $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

c) Phương trình bậc bốn trùng phương hay tương giao của đồ thị hàm đa thức bậc 4 trùng phương vàc trucj Ox)

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c = 0 \ \left(a \neq 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \geq 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$. t = x^2 ⇔ x = $\pm\sqrt{t}$

Số nghiệm	4	3	2	**1**	**0**	**CSC**
Điều kiện	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S/2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S/2 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \\ \Delta < 0 \end{array}\right.$	$\begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}$

Một số kiến thức hình học bổ sung:

- Cho: $\overrightarrow{u_1} = \left(x_1; y_1\right), \overrightarrow{u_2} = \left(x_2; y_2\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2$

- Cho $A_1(x_1; y_1),\ A_2(x_2; y_2):\ \overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1\right);\ A_1A_2 = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$

- Cho tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ trong đó: $A_1(x_1; y_1),\ A_2(x_2; y_2),\ A_3(x_3; y_3)$ không thẳng hàng:

+ Tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ vuông tại $A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_1A_3} = 0$

+ Tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| \\ \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| \end{cases}$

- Diện tích tam giác : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}h.a = \dfrac{1}{2}b.c\sin A = pr = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

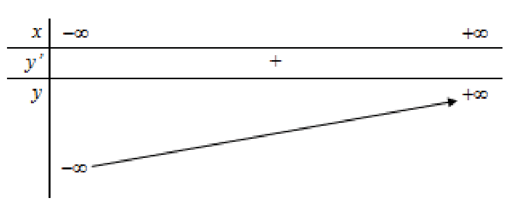
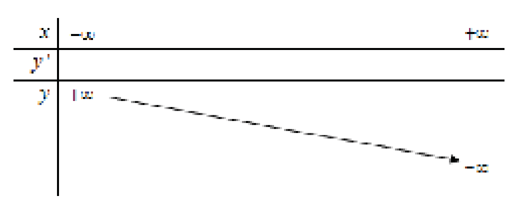
6. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

6.1. Đồ thị hàm số bậc 3

Đồ thị hàm số luôn cắt trục Ox tại ít nhất một điểm

Đồ thị nhận điểm $I\left(-\dfrac{b}{3a}; f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ là tâm đối xứng

Bảng biến thiên và dạng đồ thị

Trường hợp	**a>0**	**a<0**
$y' = 0$ **vô nghiệm**	 *) Hàm số luôn đồng biến trên R *) Hàm số không có cực trị	 *) Hàm số luôn nghịch biến trên R *) Hàm số không có cực trị

II.MŨ - LOGARIT

1. Định nghĩa và các công thức luỹ thừa và mũ

a) Lũy thừa

Số mũ α	**Cơ số** a	**Luỹ thừa** a^{α}
$\alpha = n \in N^*$	$a \in R$	$a^{\alpha} = a^n = a.a......a$ *(n thừa số a)*
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^{\alpha} = a^0 = 1$
$\alpha = -n\,(n \in N^*)$	$a \neq 0$	$a^{\alpha} = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$\alpha = \dfrac{m}{n}(m \in Z, n \in N, n \geq 2)$	$a > 0$	$a^{\alpha} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a)$
$\alpha = \lim r_n\ (r_n \in Q, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^{\alpha} = \lim a^{r_n}$

2. Các phép toán: Với a và b là những số thực dương, α và β là những số thực tùy ý, ta có

$$a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \qquad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} \qquad (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha.\beta} = (a^{\beta})^{\alpha} \qquad (ab)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$$

3. So sánh:

Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$; Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Với 0 < a < b ta có: $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

b) Căn bậc n:

- *Khái niệm* : Căn bậc *n* của *a* là số *b* sao cho $b^n = a$.
- Với *a, b* $\geq$ *0, m, n* $\in$ *N*, p, q* $\in$ *Z* ta có:

  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(b > 0)$; $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p\ (a > 0)$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

- Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}\ (a > 0)$ *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

  - Nếu *n* là số nguyên dương lẻ và *a < b* thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

  - Nếu *n* là số nguyên dương chẵn và *0 < a < b* thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Chú ý*:* + Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$

$$+ \quad \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi n lẻ} \\ |a| & \text{khi n chẵn} \end{cases}$$

2. Định nghĩa và các công thức lôgarit

*** Định nghĩa** *:* $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$

*** Phép toán** *: Với a, b > 0; a* $\neq$ *1; b*$_1$*, b*$_2$ *> 0;* $\alpha \in R$ *ta có:*

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^b = b$; $a^{\log_a b} = b$

*** So sánh:** Nếu *a > 1* thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. Nếu *0 < a < 1* thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

*** Phép toán**: $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

*** Đổi cơ số** Với *a, b, c > 0 và a, b ≠ 1,* ta có:

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c = \log_a c$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha}\log_a c \ (\alpha \neq 0)$

*** Logarit thập phân**: $\lg b = \log b = \log_{10} b$

*** Logarit tự nhiên** (logarit Nepe): $\ln b = \log_e b$ (với $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281......$)

3. HÀM SỐ LŨY THỪA

*** Dạng:** $y = x^\alpha, \quad \alpha \in R$

*** Tập xác định: D**

- α nguyên dương thì TXĐ là D = R
- α nguyên âm hoặc bằng 0 thì TXĐ là D = R \ {0}.
- α không là số nguyên thì TXĐ là D = (0; +∞).

*** Đạo hàm :** $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ (∀x ∈ **D**) . $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ với u là hàm hợp.

*** Tính đơn điệu :** trên khoảng (0 ; +∞) hàm số đồng biến nếu α >0 và nghịch biến nếu α < 0 .

****Đồ thị:***

- Luôn đi qua điểm (1; 1)
- $\alpha \geq 0$ đồ thị không có tiệm cận.
- $\alpha < 0$ đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.

**** Chú ý:*** *Hàm số* $y = x^{\frac{1}{n}}$ *không đồng nhất với hàm số* $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N^*)$.

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ *(với x > 0 khi n chẵn và x≠ 0 khi n lẻ)* $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

4. HÀM SỐ MŨ

*** Dạng:** $y = a^x$ *(a > 0, a ≠ 1).*

*** Tập xác định:** D = R.

*** Tập giá trị:** T = (0; +∞).

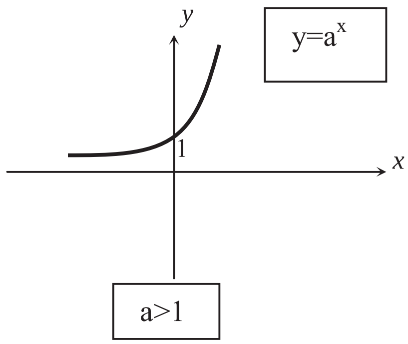
*** Đạo hàm:** $\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(e^u\right)' = e^u.u'$ $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$ $\left(a^u\right)' = a^u.u'.\ln a$

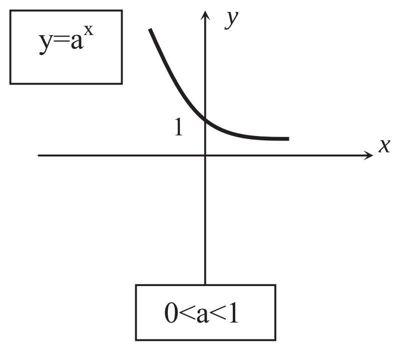
*** Tính đơn điệu:**

- Khi a > 1 hàm số đồng biến trên R.
- Khi 0 < a < 1 hàm số nghịch biến trên R.

*** Đồ thị:**

- Luôn đi qua các điểm (0; 1) ; (1 ; a)
- đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox.





Chú ý: Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

5. HÀM SỐ LÔGARIT

* **Dạng:** $y = \log_a x$ *(a > 0, a ≠ 1)*

* **Tập xác định**: D = (0; +∞).

* **Tập giá trị:** T = R.

* **Đạo hàm:** $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ (x ≠0); $\quad \left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}$

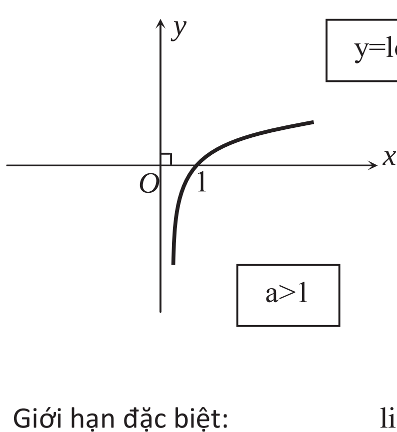
$\left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\ln a}$ (x≠0) $\quad \left(\log_a|u|\right)' = \frac{u'}{u\ln a}$

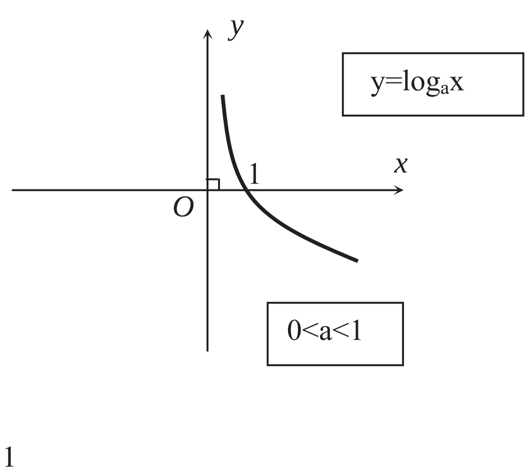
* **Tính đơn điệu:**

- Khi a > 1 hàm số đồng biến trên (0; +∞).
- Khi 0 < a < 1 hàm số nghịch biến trên (0; +∞).

* **Đồ thị:**

- Luôn đi qua điểm (1; 0) và (a ; 1).
- đồ thị có tiệm cận đứng là trục Oy.





Chú ý **:** Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

6. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

6.1. Phương trình mũ cơ bản: Với a > 0, a ≠ 1: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

6.2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

a) Đưa về cùng cơ số: Với a > 0, a ≠ 1: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì:* $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N)=0$

b) Logarit hoá: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \left(\log_a b\right).g(x)$

c) Đặt ẩn phụ:

- ***Dạng 1***: $P(a^{f(x)})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)},\ t>0 \\ P(t)=0 \end{cases}$, trong đó *P(t)* là đa thức theo *t*.
- ***Dạng 2***: $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$ Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}$
- ***Dạng 3***: $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$, với $ab=1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét phương trình: *f(x) = g(x)* *(1)*

- Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).
- Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của *f(x)* và *g(x)* để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:
- Nếu *f(x)* đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$

Cần nhớ:

+) a>1: Hàm số $y=a^x$ đồng biến (nghĩa là: Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$)

+) 0<a<1: Hàm số $y=a^x$ nghịch biến (nghĩa là: Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

+) Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên I.

- Nếu $f'(x)>0$ thì hàm số đồng biến trên I;
- Nếu $f'(x)<0$ thì hàm số nghịch biến trên I.

+) Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên I. Nếu $y=f(x)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến thì $f(u)=f(v) \Rightarrow u=v$

e) Đưa vềphương trình các phương trình đặc biệt

- **Phương trình tích** A.B = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$
- **Phương trình** $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

f) Phương pháp đối lập : Xét phương trình: *f(x) = g(x)* *(1)*

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

g) **Phương pháp phân tích thành tích:**

$$uv + au + bv + ab = 0 \Leftrightarrow \left(v+a\right)\left(u+b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=-a \\ u=-b \end{array}\right.$$

7.BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:*

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

8. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:

8.1. Phương trình logarit cơ bản: Với a > 0, a ≠ 1: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

8.2. Một số phương pháp giải phương trình logarit

8.3. Dạng cơ bản

Dạng 1: Phương trình dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x);\ 0 < a \neq 1$

Phương pháp giải:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình dạng : $\log_a f(x) = b$

Phương pháp giải:

Phương trình $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

Dạng 3: Phương trình có dạng

$\log_a f(x) = \log_b g(x)\ \ (0 < a, b \neq 1)$

Phương pháp giải:

+) $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$

Khử ẩn x để đưa về phương trình mũ ẩn t.

+) $\log_{f(x)} g(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = [f(x)]^a \\ f(x);\ g(x) > 0;\ f(x) \neq 1 \end{cases}$

Dạng 4: Phương trình dạng

+) $f(\log_a x) = 0\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a x \\ f(t) = 0 \end{cases}$

+) $f[\log_a g(x)] = 0\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a g(x) \\ f(t) = 0 \end{cases}$

8.4. Một số phương pháp giải phương trình mũ:

a) Phương pháp đưa về cùng cơ số

Cần nhớ các công thức biến đổi sau:

1. $a^{m+n} = a^m.a^n$ **2**. $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$ **3**. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ **4**. $a^{nx} = (a^x)^n$ **5**. $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ **6**. $a^{-nx} = \dfrac{1}{(a^x)^n}$

b) Phương pháp lôgarit hoá

Sử dụng một số công thức sau:

1. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y\ \ (x, y > 0, 0 < a \neq 1)$ **2**. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y\ \ (x, y > 0, 0 < a \neq 1)$

3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x\ \ (x > 0, 0 < a \neq 1)$ **4**. $\log_{a^\alpha} x = \dfrac{1}{\alpha}\log_a x\ \ (x > 0, 0 < a \neq 1, \alpha \neq 0)$

5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}\ \ (0 < a, c \neq 1, b > 0)$ **6.** $\log_{a^\beta} x^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}\log_a x\ \ (x > 0, 0 < a \neq 1, \beta \neq 0)$

Chú ý: $\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|\ \ \forall x \neq 0$

c) Phương pháp đặt ẩn phụ

+ Đặt ẩn phụ hoàn toàn:

Cần nhớ một số công thức sau:

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < a, c \neq 1, b > 0)$, $\log_{a^\beta} x^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}\log_a x \quad (x > 0, 0 < a \neq 1, \beta \neq 0)$

Đặt $t = \log_a x$. Một số công thức biến đổi

+ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Sử dụng biệt thức $\vartriangle$ cho tam thức bậc 2 ẩn t, trong đó $t = \log_a x$ để phân tích thành tích

d) Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Cần nhớ:

+) a>1: Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên R_+ (nghĩa là: Nếu $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$)

+) 0<a<1: Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên R_+ (nghĩa là: Nếu $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

+) Hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên I.

- Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến trên I;
- Nếu $f'(x) < 0$ thì hàm số nghịch biến trên I.

+) Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên I. Nếu $y = f(x)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến thì $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

+) Đạo hàm: $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$

e) Phương pháp đối lập: Giả sử cần giải phương trình: $f(x) = g(x)$ ta chỉ ra: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$

khi đó: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

f) Phương pháp phân tích thành tích:

$uv + au + bv + ab = 0 \Leftrightarrow (v + a)(u + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = -a \\ u = -b \end{array}\right.$

Chú ý:

- *Khi giải phương trình logarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.*
- *Với a, b, c > 0 và a, b, c ≠ 1:* $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:

Khi giải các bất phương trình logarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số logarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:*

$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0$; $\dfrac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$.

10. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

10.1. LÃI ĐƠN

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi mà số tiền gốc sinh ra

Công thức tính lãi đơn : $T_n = M(1 + r.n)$

Với T_n : số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn ;

M : số tiền vốn ban đầu.

r : Lãi suất định kỳ (tính theo %)

n : số kỳ hạn tính lãi.

10.2. LÃI KÉP

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a) Lãi kép gửi một lần : Công thức tính lãi kép : $T_n = M\left(1 + r\right)^n$

Với T_n : số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn ;

M : số tiền vốn ban đầu.

r : Lãi suất định kỳ (tính theo %)

n : số kỳ hạn tính lãi.

b) Lãi kép, gửi định kỳộ

****Trường hợp 1** : Tiền được gửi vào cuối mỗi tháng*

Cuối tháng thư nhất người đó bắt đầu gửi tiền : T_1 = M

Cuối tháng thứ hai ngườiđó có số tiền là : M(1 + r) + M = M[(1+r) + 1] = $\frac{M}{r}[(1+r)^2-1]$

Cuối tháng thứ ba ngườiđó có số tiền là : $\frac{M}{r}[(1+r)^2-1]$ (1+r) + M= $\frac{M}{r}[(1+r)^3-1]$

Cuối tháng thứ n ngườiđó có số tiền là : $T_n = \frac{M}{r}[(1+r)^n-1]$

****Trường hợp 2** : Tiền được gửi vào đầu mỗi tháng*

Cuối tháng thứ n ngườiđó có số tiền là : $T_n = \frac{M}{r}[(1+r)^n-1](1+r)$

c) Vay trảgóp : Vay A, lãi suất r, số kì vay n, trả hàng kì : M

$$T_n = A\left(1+r\right)^n - \frac{M}{r}[(1+r)^n-1]$$

d) Tăng lương : Khởi điểm A, tỉ lệ tăng hàng kì : r, số lần tăng lương : n

Tổng tiền : $T_n = \frac{A}{r}[(1+r)^n-1]$ và tiền lương ở kì tăng lương thứ n là $T_n = A\left(1 + r\right)^n$

III. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I. LÍ THUYẾT NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

1. Nguyên hàm cơ bản

$\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\left(\frac{ax+b}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + \mathrm{c}$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c\ + \mathrm{c}$	$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + c$
$\int e^{ax+b}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$\int \mathrm{tg}(ax+b)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
$\int m^{ax+b}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a\ln m}m^{ax+b} + c$	$\int \mathrm{cotg}(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\mathrm{cotg}(ax+b) + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax+b) + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a}\right) + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\frac{ax+b}{2}\right\rvert + c$	$\int \ln(ax+b)\,\mathrm{dx} = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + c$
$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{dx} = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\frac{ax+b}{2}\right\rvert + c$
$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{dx} = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	

2. Tích phân

- *Cho hàm số f liên tục trên K và a, b ∈ K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì:*

F(b) – F(a) *được gọi l* ***tích phân của f từ a đến b*** và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$

- *Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x, tức là:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots = F(b) - F(a)$$

- ***Ý nghĩa hình học***:

Nếu hàm số y = f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a; b] thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a, x = b là: $\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$

3. Tính chất của tích phân

- $\int_0^0 f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ *(k: hằng số)*
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- *Nếu f(x) ≥ 0 trên [a; b] thì* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- *Nếu f(x) ≥ g(x) trên [a; b] thì* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- *Nếu* $m \leq f(x) \leq M$ *trên [a; b] thì* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

4. Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến số: $\boxed{\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du}$ *trong đó: u = u(x) có đạo hàm liên tục trên K, y = f(u) liên tục và hàm hợp f[u(x)] xác định trên K, a, b ∈ K.*

b) Phương pháp tích phân từng phần

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K, a, b ∈ K thì: $\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$

Chú ý: *– Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.*

– Trong phương pháp tích phân từng phần, ta cần chọn sao cho $\int_a^b vdu$ *dễ tính hơn* $\int_a^b udv$.

– Khi tính $\int_a^b f(x)dx$ *cần chú ý xem hàm số y = f(x) có liên tục trên* $[a;b]$ *không ? Nếu có thì áp dụng phương pháp đã học để tính tích phân. Nếu không kết luận tích phân không tồn tại.*

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Phương pháp 1: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Dạng 1: *Giả sử cần tính tích phân:* $\int_a^b f(x)dx$ *. Nếu* $f(x) = f[u(x)].u'(x)$ *thì :* $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$

Dạng 2: *Giả sử cần tính tích phân:* $\int_a^b f(x)dx$ *. Nhưng tính theo dạng 1 không được, lúc này ta chuyển về hàm lượng giác. Ta thường gặp các dạng sau:*

$$\left.\begin{array}{l}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\end{array}\right\rangle \quad \text{Đặt } x = |a|\sin t \qquad \text{hoặc đặt : } x = |a|\cos t$$

$$\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\\ \int\frac{1}{a^2+x^2}dx\end{array}\right\rangle \quad \text{Đặt } x=|a|\tan t \quad \text{hoặc đặt : } x=|a|\cot t$$

$$\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\end{array}\right\rangle \quad \text{Đặt } x=\frac{|a|}{\sin t} \quad \text{hoặc đặt } x=\frac{|a|}{\cos t}$$

DẠNG	CÁCH ĐỔI BIẾN
$\int f\left(ax+b\right)dx$	Đặt $t=ax+b$
$\int f(x^{n+1}).x^n dx$	Đặt $t=x^{n+1}$
$\int f\left(\sqrt{x}\right).\frac{dx}{\sqrt{x}}$	Đặt $t=\sqrt{x}$
$\int f\left(\sin x\right)\cos xdx$	Đặt $t=\sin x$
$\int f\left(\cos x\right)\sin xdx$	Đặt $t=\cos x$
$\int f\left(\tan x\right)\frac{dx}{\cos^2 x};\int f\left(\tan x\right)\left(1+\tan^2 x\right)dx$	Đặt $t=\tan x$
$\int f\left(\cot x\right)\frac{dx}{\sin^2 x};\int f\left(\cot x\right)\left(1+\cot^2 x\right)dx$	Đặt $t=\cot x$
$\int f\left(e^x\right).e^x dx$	Đặt $t=e^x$
$\int f\left(\ln x\right)\frac{dx}{x}$	Đặt $t=\ln x$
$\int f\left(x\pm\frac{1}{x}\right).\left(x\pm\frac{1}{x}\right)dx$	Đặt $t=x\pm\frac{1}{x}$

Phương pháp 2: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Với P(x) là đa thức ẩn x, có các dạng sau:

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos xdx$	$\int_a^b P(x).\sin xdx$	$\int_a^b P(x).\ln xdx$
Đặt $u=$	*P(x)*	*P(x)*	*P(x)*	*lnx*
Đặt $dv=$	$e^x dx$	$\cos xdx$	$\sin xdx$	*P(x)*

Thứ tự ưu tiên đặt u trong phương pháp Nguyên hàm từng phần:

$$\text{Lôgarít} \rightarrow \text{Đa thức} \rightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x,\cos x & \text{(Hàm lượng giác)}\\ e^x & \text{(Hàm mũ)}\end{array}\right.$$

IV. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

- Loại 1: *Nếu bậc của P(x) ≥ bậc của Q(x) thì ta thực hiện phép chia đa thức.*

- Loại 2: *Nếu bậc của P(x) < bậc của Q(x) và Q(x) có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích f(x) thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).*

Các dạng dùng phöông phaùp heä soá baát ñònh thường gặp:

Dạng 1: Mẫu số có nghiệm đơn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-c)}$$

Dạng 2: Mẫu số có nghiệm đơn và bậc 2 vô nghiệm:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, với\, \Delta=b^2-4ac<0$$

Dạng 3: Mẫu số có nghiệm bội:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x-a\right)^2}=\frac{A}{\left(x-a\right)^2}+\frac{B}{x-a}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x-a\right)^3}=\frac{A}{\left(x-a\right)^3}+\frac{B}{\left(x-a\right)^2}+\frac{C}{x-a}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}+\frac{E}{(x-b)^3}$$

- Loại 3: Một số nguyên hàm ta dùng phương pháp đổi biến hoặc từng phần

V. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

+ Dạng 1: $f\left(x\right)=R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ → đặt: $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

+ Dạng 2: $f\left(x\right)=R\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right)$ → đặt: $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$

+ Dạng 3: $f\left(x\right)=R\left(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b}\right)$ → đặt: $t=\sqrt[n.m]{ax+b}$

+ Dạng 4: $\left.\begin{matrix}\int\sqrt{a^2-x^2}dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\end{matrix}\right\rangle$ *Đặt* $x=|a|\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ *hoaëc:* $x=|a|\cos t,\ 0\le t\le\pi$

+ Dạng 5: $\left.\begin{matrix}\int\sqrt{a^2+x^2}dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\end{matrix}\right\rangle$ *Đặt* $x=|a|\tan t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ *hoaëc:* $x=|a|\cot t,\ 0<t<\pi$

+ Dạng 6: $\left.\begin{matrix}\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx \\ \int\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx\end{matrix}\right\rangle$ *Đặt* $x = a\cos 2t$

+ Dạng 7: $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ *Đặt* $x = a + (b-a)\sin^2 t$

VI. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Dạng 1: Các dạng: $\begin{cases}\int \sin ax.\sin bxdx \\ \int \sin ax.\sin bxdx \\ \int \sin ax.\sin bxdx\end{cases}$

Phương pháp giải: *Dùng công thức biến đổi thành tổng:* $\begin{cases}\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right] \\ \sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \\ \sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]\end{cases}$

Dạng 2: $\begin{cases}\int \sin^n axdx \\ \int \cos^n axdx\end{cases}$ $(n \in N)$

+ Với ***n*** **lẻ** $\int \sin^n axdx = \int \sin^{n-1} ax.\sin axdx = \int \sin^{n-1} ax.\sin axdx$

$= \int\left(\sin^2 ax\right)^{\frac{n-1}{2}}.\sin axdx = \int\left(1-\cos^2 ax\right)^{\frac{n-1}{2}}.\sin axdx$. Đặt : $u = \cos x$

$\int \cos^n axdx$. *Phân tích như trên sau đó đặt:* $u = \sin x$

+ Với ***n*** **chẵn:** *Sử dụng công thức hạ bậc*: $\cos^2 ax = \dfrac{1+\cos 2ax}{2}$ **;** $\sin^2 ax = \dfrac{1-\cos 2ax}{2}$

Dạng 3: $\int \sin^n ax.\cos^m axdx$ (n, m $\in$ N)

+ Với ***n*** **lẻ hay** ***m*** **lẻ:** **n lẻ** Đặt u = cosax **;** **m lẻ** Đặt u = sinax

+ Với ***n*** **và** ***m*** **chẵn:** Sử dụng công thức hạ bậc:

$\cos^2 ax = \dfrac{1+\cos 2ax}{2}$ **;** $\sin^2 ax = \dfrac{1-\cos 2ax}{2}$ **;** $\sin x.\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Dạng 4: $\begin{cases}\int \dfrac{1}{1+\cos ax}dx \\ \int \dfrac{1}{1-\cos ax}dx\end{cases}$

Sử dụng công thức: $1+\cos ax = 2\cos^2\dfrac{ax}{2}$ và $1-\cos ax = 2\sin^2\dfrac{ax}{2}$

Cần nhớ: $\begin{cases} \sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a \pm \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin a + \cos a = \sqrt{2}\cos\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin a + \cos a = -\sqrt{2}\cos\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Dạng 5: $\begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\sin ax}dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\cos ax}dx \end{cases}$.

Phương pháp: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin ax}dx = \int \frac{\sin ax}{\sin^2 ax}dx = \int \frac{\sin ax}{1-\cos^2 ax}dx$. Đặt $u = \cos x$

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos ax}dx = \int \frac{\cos ax}{\cos^2 ax}dx = \int \frac{\cos ax}{1-\sin^2 ax}dx$. Đặt $u = \sin x$

Dạng 6: $\begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\sin^n ax}dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\cos^n ax}dx \end{cases} \quad (n \in N)$

Phương pháp:

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^n ax}dx = \int \frac{1}{\left(\sin^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}}.\frac{1}{\sin^2 ax}dx = \int \left(1+\tan^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}.\frac{1}{\sin^2 ax}dx$; Đặt $u = \tan ax$.

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^n ax}dx = \int \frac{1}{\left(\cos^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}}.\frac{1}{\cos^2 ax}dx = \int \left(1+\cot^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}.\frac{1}{\cos^2 ax}dx$; Đặt $u = \cot ax$

Dạng 7: $\begin{cases} \int \tan^n ax dx \\ \int \cot^n ax dx \end{cases} \quad (n \in N)$

Phương pháp: + Biến đổi sao cho $\tan^2 ax$ làm thừa số chung

+ Thay : $\tan^2 ax = \dfrac{1}{\cos^2 ax} - 1$

Dạng 8: $\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\tan^n ax}{\cos^2 ax}dx \\ \displaystyle\int \frac{\cot^n ax}{\sin^2 ax}dx \end{cases} \quad (n \in N)$. **Phương pháp:** đặt $u = \tan ax$ hoặc $u = \cot ax$

Dạng 9: $\displaystyle\int \frac{dx}{a.\sin x + b.\cos x + c}$

Cách 1: Phương pháp chung:

Đặt : $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

Cách 2: Phương pháp riêng: Nếu $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có: $\dfrac{1}{a\sin x + b\cos x + c} = \dfrac{1}{c\left[1+\cos\left(x-\alpha\right)\right]} = \dfrac{1}{2c}.\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x-\alpha}{2}}$.

Trong đó : $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó : $I = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int \dfrac{dx}{\cos^2\dfrac{x-\alpha}{2}} = \dfrac{1}{c}\tan\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right) + C$

Dạng 10: $\displaystyle\int \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}dx$

Phương pháp: Phân tích $\dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x} = A + \dfrac{B(c.\cos x - d.\sin x)}{c.\sin x + d.\cos x}$

Sau đó dùng đồng nhất thức tìm *A, B.*

Dạng 11: $\displaystyle\int \frac{a.\sin x + b.\cos x + m}{c.\sin x + d.\cos x + n}dx$

Phương pháp:

Phân tích $\dfrac{a.\sin x + b.\cos x + m}{c.\sin x + d.\cos x + n} = A + \dfrac{B(c.\cos x - d.\sin x)}{c.\sin x + d.\cos x + n} + \dfrac{C}{c.\sin x + d.\cos x + n}$

Sau đó dùng đồng nhất thức tìm *A, B, C.*

Dạng 12: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}$

Ta thực hiện theo các bước sau :

+ Bước 1: Sử dụng đồng nhất thức : $1 = \dfrac{\sin\left(a-b\right)}{\sin\left(a-b\right)} = \dfrac{\sin\left[\left(x+a\right)-\left(x+b\right)\right]}{\left(a-b\right)}$

+ Bước 2: Ta được :

$$\int \frac{dx}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)} = \frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\int \frac{\sin\left[\left(x-a\right)-\left(x-b\right)\right]}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\int \frac{\sin\left(x+a\right)\cos\left(x-b\right) - \sin\left(x-b\right)\cos\left(x-a\right)}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\left[\int \frac{\cos\left(x+b\right)}{\sin\left(x+b\right)}dx - \frac{\cos\left(x+a\right)}{\sin\left(x+a\right)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\left[\ln\left|\sin\left(x+b\right)\right| - \ln\left|\sin\left(x+a\right)\right|\right] = \frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\ln\left|\frac{\sin\left(x+b\right)}{\sin\left(x+a\right)}\right| + C$$

**** Chú ý: phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng tích phân sau :***

$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$ sử dụng đồng nhất thức : $1=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$$ sử dụng đồng nhất thức : $1=\frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$.

Dạng 13: $\int \frac{dx}{\sin x+\sin\alpha}$

* Dùng công thức tổng thành tích biến đổi về dạng 12 rồi giải bình thường.

* Chú ý : Phương pháp trên cũng áp dụng cho các dạng tích phân sau :

$$\int \frac{dx}{\cos x+\cos\alpha}; \qquad \int \frac{dx}{\cos x+m} \qquad \int \frac{dx}{\sin x+m}; \quad |m|\le 1 .$$

Dạng 14: $\int \frac{a_1\sin^2 x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$.

\+ Biến đổi :

$$a_1\sin^2 x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x=(A\sin x+B\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)+C(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

\+ Khi đó: $\int \frac{(A\sin x+B\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)+C(\sin^2 x+\cos^2 x)}{a_2\sin x+b_2\cos x}$

$$=\int(A\sin x+B\cos x)+C\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x}$$

$$=-A\cos x+B\sin x+\frac{C}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)}=-A\cos x+B\sin x+\frac{C}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right|+C$$

Trong đó : $\sin\alpha=\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$; $\quad \cos\alpha=\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Dạng 15: $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}$

\+ Biến đổi về dạng : $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}=\int\frac{dx}{(a\tan^2 x+b\tan x+c)\cot^2 x}$

\+ Đặt: $t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(1+\tan^2 x)dx=(1+t^2)dx\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

\+ Khi đó $\int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}=\int\frac{dt}{at^2+bt+c}$.

Dạng 16: $A_{1.1}=\int(\sin x)^n dx$; $A_{1.2}\int(\cos x)^n dx$

1. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\sin^3 x=\frac{-\sin 3x+3\sin x}{4};\cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

2. Phương pháp

2.1. Nếu n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc

2.2. Nếu n = 3 thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo 2.3.

2.3. Nếu 3 ≤ n lẻ (n = 2p +1) thì thực hiện biến đổi:

$$A_{1.1}=\int(\sin x)^{n}dx=\int(\sin x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^{p}d(\cos x)$$

$$=-\int\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+...+(-1)^k C_p^k\left(\cos^2 x\right)^k+...+(-1)^p C_p^p\left(\cos^2 x\right)^p\right]d(\cos x)$$

$$=-\left[C_p^0\cos x-\frac{1}{3}C_p^1\cos^3 x+...+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\cos x)^{2k+1}+...+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\cos x)^{2p+1}\right]+c$$

$$A_{1.2}=\int(\cos x)^{n}dx=\int(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^{p}d(\sin x)$$

$$=\int\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+...+(-1)^k C_p^k\left(\sin^2 x\right)^k+...+(-1)^p C_p^p\left(\sin^2 x\right)^p\right]d(\sin x)$$

$$=\left[C_p^0\sin x-\frac{1}{3}C_p^1\sin^3 x+...+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\sin x)^{2k+1}+...+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\sin x)^{2p+1}\right]+c$$

Dạng 17: $B=\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,dx$ (m, n∈N)

1. Phương pháp:

1.1. Trường hợp 1: m, n là các số nguyên

a. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

b. Nếu m chẵn, n lẻ (n =2p +1) thì biến đổi:

$$B=\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int(\sin x)^{m}\left(1-\sin^2 x\right)^{p}d(\sin x)$$

$$=\int(\sin x)^{m}\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+...+(-1)^k C_p^k\left(\sin^2 x\right)^k+...+(-1)^p C_p^p\left(\sin^2 x\right)^p\right]d(\sin x)=$$

$$\left[C_p^0\frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1}-C_p^1\frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3}+...+(-1)^k C_p^k\frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m}+...+(-1)^p C_p^p\frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}\right]+c$$

c. Nếu m chẵn, n lẻ (n =2p +1) thì biến đổi:

$$B=\int(\sin x)^{2p+1}(\cos x)^{n}dx=\int(\cos x)^{n}(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int(\cos x)^{n}\left(1-\cos^2 x\right)^{p}d(\cos x)$$

$$=-\int(\cos x)^{n}\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+...+(-1)^k C_p^k\left(\cos^2 x\right)^k+...+(-1)^p C_p^p\left(\cos^2 x\right)^p\right]d(\cos x)=$$

$$-\left[C_p^0\frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}-C_p^1\frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3}+...+(-1)^k C_p^k\frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n}+...+(-1)^p C_p^p\frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n}\right]+c$$

d. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

1.2. Nếu m, n là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt u = sinx ta có:

$$B=\int\sin^{m}x\cos^{n}x dx=\int(\sin x)^{m}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos x dx=\int u^{m}\left(1-u^2\right)^{\frac{m-1}{2}}du\ (*)$$

• Tích phân (*) tính được ⇔ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2};\frac{n-1}{2};\frac{m+k}{2}$ là số nguyên

Dạng 18: $C_{3.1}=\int(\text{tg}\,x)^{n}dx;\ C_{3.2}=\int(\text{cotg}\,x)^{n}dx$ (n∈N)

1. Công thức sử dụng

- $\int\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int d\left(\operatorname{tg} x\right)=\operatorname{tg} x+c$
- $\int\left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)dx=-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int d\left(\operatorname{cotg} x\right)=-\operatorname{cotg} x+c$
- $\int\operatorname{tg} x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+c$
- $\int\operatorname{cotg} x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x}=\ln\left|\sin x\right|+c$

Dạng 19: $\mathrm{D}_{4.1}=\int\frac{(\mathrm{tg\,x})^{\mathrm{m}}}{(\cos\mathrm{x})^{\mathrm{n}}}\mathrm{dx}$; $\mathrm{D}_{4.2}=\int\frac{(\mathrm{cotg\,x})^{\mathrm{m}}}{(\sin\mathrm{x})^{\mathrm{n}}}\mathrm{dx}$

1. Phương pháp: Xét đại diện $D_{4.1}=\int\frac{(\operatorname{tg} x)^m}{(\cos x)^n}dx$

1.1. Nếu n chẵn (n = 2k) thì biến đổi:

$$\mathrm{D}_{4.1}=\int\frac{(\mathrm{tgx})^{\mathrm{m}}}{(\mathrm{cosx})^{2\mathrm{k}}}\mathrm{dx}=\int\left(\operatorname{tg} x\right)^m\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(\operatorname{tg} x\right)^m\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{k-1}d\left(\operatorname{tg} x\right)$$

$$=\int\left(\operatorname{tg} x\right)^m\left[C_{k-1}^0+C_{k-1}^1\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^1+\ldots+C_{k-1}^p\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^p+\ldots+C_{k-1}^{k-1}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^{k-1}\right]d\left(\operatorname{tg} x\right)$$

$$=C_{k-1}^0\frac{\left(\operatorname{tg} x\right)^{m+1}}{m+1}+C_{k-1}^1\frac{\left(\operatorname{tg} x\right)^{m+3}}{m+3}+\ldots+C_{k-1}^p\frac{\left(\operatorname{tg} x\right)^{m+2p+1}}{m+2p+1}+\ldots+C_{k-1}^{k-1}\frac{\left(\operatorname{tg} x\right)^{m+2k-1}}{m+2k-1}+c$$

1.2. Nếu m lẻ, n lẻ(m = 2k +1, n = 2h +1) thì biến đổi:

$$\mathrm{D}_{4.1}=\int\frac{(\mathrm{tgx})^{2\mathrm{k}+1}}{(\mathrm{cosx})^{2\mathrm{h}+1}}\mathrm{dx}=\int\left(\operatorname{tg} x\right)^{2k}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cosx}}dx=\int\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\int\left(u^2-1\right)^k u^{2h}du$$ (ở đây $u=\frac{1}{\cos x}$)

$$=\int u^{2h}\left[C_k^0\left(u^2\right)^k-C_k^1\left(u^2\right)^{k-1}+\ldots+(-1)^p C_k^p\left(u^2\right)^{k-p}+\ldots+(-1)^k C_k^k\right]du$$

$$=C_k^0\frac{u^{2k+2h+1}}{2k+2h+1}-C_k^1\frac{u^{2k+2h-1}}{2k+2h-1}+\ldots+(-1)^p C_k^p\frac{u^{2k+2h-2p+1}}{2k+2h-2p+1}+\ldots+(-1)^k C_k^k\frac{u^{2h+1}}{2h+1}+c$$

1.3. Nếu m chẵn, n lẻ (m = 2k, n = 2h + 1) thì sử dụng biến đổi:

$$D_{4.1}=\int\frac{\left(\operatorname{tg} x\right)^{2k}}{\left(\cos x\right)^{2h+1}}dx=\int\frac{\left(\sin x\right)^{2k}\cos x}{\left(\cos x\right)^{2(k+h+1)}}dx=\int\frac{\left(\sin x\right)^{2k}}{\left(1-\sin^2 x\right)^{k+h+1}}d\left(\sin x\right);\left(u=\sin x\right)$$

$$D_{4.1}=\int\frac{u^{2k}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}=\int\frac{u^{2k-2}\left[1-\left(1-u^2\right)\right]}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}du=\int\frac{u^{2k-2}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}-\int\frac{u^{2k-2}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h}}$$

Hệ thức trên là hệ thức truy hồi, kết hợp với bài tích phân hàm phân thức hữu tỉ ta có thể tính được $D_{4.1}$.

Dạng 20: Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

1. Phương pháp:

$$E_{5.1}=\int(\cos mx)(\cos nx)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]dx$$
$$E_{5.2}=\int(\sin mx)(\sin nx)dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right]dx$$
$$E_{5.3}=\int(\sin mx)(\cos nx)dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]dx$$
$$E_{5.4}=\int(\cos mx)(\sin nx)dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\right]dx$$

VI. TÍCH PHÂN HÀM CÓ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng 1: Giả sử cần tính tích phân $I=\int_a^b|f(x)|dx$, ta thực hiện các bước sau:

+ Bước 1. Lập bảng xét dấu (BXD) của hàm số f(x) trên đoạn [a; b], giả sử f(x) có BXD:

x	a		x_1		x_2		b
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

+ Bước 2. Tính $I=\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{x_1}f(x)dx-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx+\int_{x_2}^{b}f(x)dx$.

Dạng 2: Giả sử cần tính tích phân $I=\int_a^b\left[|f(x)|\pm|g(x)|\right]dx$, ta thực hiện:

Cách 1. Tách $I=\int_a^b\left[|f(x)|\pm|g(x)|\right]dx=\int_a^b|f(x)|dx\pm\int_a^b|g(x)|dx$ rồi sử dụng dạng 1 ở trên.

Cách 2.

Bước 1. Lập bảng xét dấu chung của hàm số f(x) và g(x) trên đoạn [a; b].

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu ta bỏ giá trị tuyệt đối của f(x) và g(x).

Dạng 3: Để tính các tích phân $I=\int_a^b\max\left\{f(x),\ g(x)\right\}dx$ và $J=\int_a^b\min\left\{f(x),\ g(x)\right\}dx$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn [a; b].

Bước 2.

+ Nếu $h(x)>0$ thì $\max\left\{f(x),\ g(x)\right\}=f(x)$ và $\min\left\{f(x),\ g(x)\right\}=g(x)$.

+ Nếu $h(x)<0$ thì $\max\left\{f(x),\ g(x)\right\}=g(x)$ và $\min\left\{f(x),\ g(x)\right\}=f(x)$.

VII. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và lẻ trên đoạn $\left[-a;\ a\right]$. Khi đó: $I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $\left[-a;\ a\right]$. Khi đó $I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $\left[-\alpha : \alpha\right]$. Khi đó: $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$

4. Cho f(x) liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .Khi đó: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

5. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ Khi đó: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(\mathrm{a} + \mathrm{b} - x)dx$

6. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thoả mãn: $f(x) = f(a+b-x)$ thì $\int\limits_{a}^{b} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

Nhận xét : Bằng cách làm tương tự ta có các công thức

**Nếu f(x) liên tục trên* $\left[0;1\right]$ *thì* $\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$

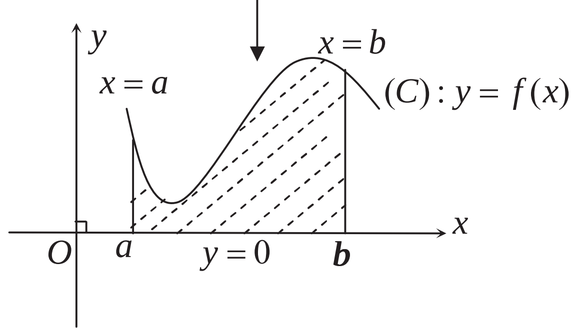
**Nếu f(x) liên tục trên* $\left[0;1\right]$ *thì* $\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$

VIII. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình phẳng

Dạng 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$, trục Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ là:

$$\boxed{S = \int\limits_{a}^{b} \left|f(x)\right|dx}$$



Phương pháp giải:

Bước 1. *Lập bảng xét dấu hàm số* $y = f(x)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

Bước 2. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân :* $\int\limits_{a}^{b} \left|f(x)\right|dx$.

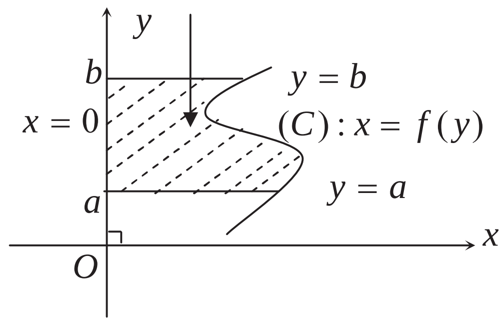
<u>**Chú ý:**</u> có 2 cách tính tích phân $\int\limits_{a}^{b} \left|f(x)\right|dx$

+ Cách 1: Nếu trên đoạn $\left[a;b\right]$ hàm số $f\left(x\right)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b \left|f(x)\right|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

+ Cách 2: Lập bảng xét dấu hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ rồi khử trị tuyệt đối.

Dạng 2: Cho hàm số $x = f\left(y\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = f\left(y\right)$, trục Oy ($x = 0$) và hai đường thẳng $y = a$ và $y = b$ là:

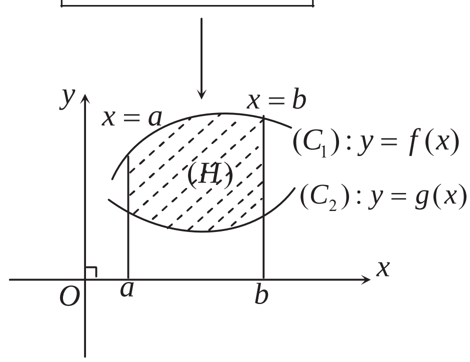
$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(y)\right|dy}$$



2. Diện tích hình phẳng

Dạng 1: Cho 2 hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ là:

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx}$$



Phương pháp giải:

Bước 1. *Lập bảng xét dấu hàm số* $f\left(x\right) - g\left(x\right)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

Bước 2. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân* $\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx$.

Dạng 2: Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ là: $\boxed{S = \int_\alpha^\beta \left|f(x) - g(x)\right|dx}$.

Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right) \quad \left(a \le \alpha < \beta \le b\right)$

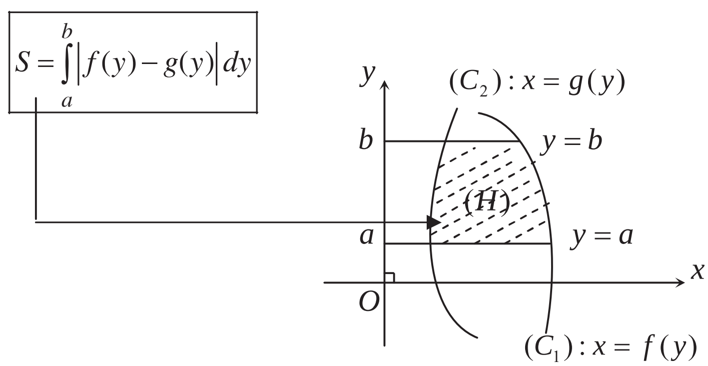
Phương pháp giải:

Bước 1. *Giải phương trình* $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$. *Giả sử ta tìm được* α, β *là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình* $\left(a \le \alpha < \beta \le b\right)$.

Bước 2. *Lập bảng xét dấu hàm số :* $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ *trên đoạn* $\left[\alpha;\beta\right]$.

Bước 3. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân:* $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$.

Dạng 3: Cho hai hàm số $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ và hai đường thẳng $y=a$ và $y=b$ là:



Phương pháp giải:

Bước 1. *Lập bảng xét dấu hàm số* $f\left(y\right)-g\left(y\right)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

Bước 2. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân* $\int\limits_{a}^{b}\left|f(y)-g(y)\right|dy$.

Dạng 4: Cho hai hàm số $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ là: $\boxed{S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|g_1(y)-g_2(y)\right|dy}$.

Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f\left(y\right)=g\left(y\right) \quad \left(a \le \alpha < \beta \le b\right)$

Phương pháp giải:

Bước 1. *Giải phương trình* $f\left(y\right)-g\left(y\right)=0$. *Giả sử ta tìm được* α, β *là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình* $\left(a \le \alpha < \beta \le b\right)$.

Bước 2. *Lập bảng xét dấu hàm số :* $f\left(y\right)-g\left(y\right)$ *trên đoạn* $\left[\alpha;\beta\right]$.

Bước 3. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân:* $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|f(y)-g(y)\right|dy$.

Dạng 5: khi tính diện tích giới hạn 3 hàm số trở lên thì phương pháp chung là vẽ đồ thị rồi dựa vào đồ thị để tính.

Cách tính giới hạn của 3 hàm số: Cho 3 hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ và $y=h\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị 3 hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ và $y=h\left(x\right)$ là:

$$\boxed{S=\int_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx+\int_{x_2}^{x_3}\left|h\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx}$$

Với: + x_1 là nghiệm phương trình: $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

+ x_2 là nghiệm phương trình: $f\left(x\right)=h\left(x\right)$

+ x_3 là nghiệm phương trình: $h\left(x\right)=g\left(x\right)$

Trong đó: $a<x_1<x_2<x_3<b$

Tóm lại khi giải toán ta thường gặp các dạng sau:

1. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a;x=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

2. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a;x=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

3. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} x=f(y) \\ x=g(y) \\ y=a;y=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b\left|f(y)-g(y)\right|dy$

Chú ý:

1. Để tính diện tích S ta phải tính tích phân (1) , muốn vậy ta phải "phá" dấu giá trị tuyệt đối .

- Nếu $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\left[a;b\right]$ thì $S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^b f(x)dx$
- Nếu $f(x)\le 0$, $\forall x\in\left[a;b\right]$ thì $S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^b\left(-f(x)\right)dx$

☝ Muốn "phá" dấu giá trị tuyệt đối ta phải xét dấu của biểu thức *f(x)* . Thường có hai cách làm như sau :

-*Cách 1:* Dùng định lí "dấu của nhị thức bật nhất" , định lí "dấu của tam thức bậc hai" để xét dấu các biểu thức f(x) ; đôi khi phải giải các bất phương trình *f(x) ≥ 0* , *f(x) ≤ 0* trên đoạn $\left[a;b\right]$

-*Cách 2: Dựa vào đồ thị của hàm số y =f(x) trên đoạn* $\left[a;b\right]$ để suy ra dấu của *f(x)* trên đoạn đó .

- Nếu trên đoạn [a ; b] đồ thị hàm số y = f(x) nằm phía "trên" trục hoành thì $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \left[a\ ;b\right]$
- Nếu trên đoạn [a ; b] đồ thị hàm số y = f(x) nằm phía "dưới" trục hoành thì $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \left[a\ ;b\right]$

-*Cách 3* Nếu f(x) không đổi dấu trên [a ; b] thì ta có : $S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

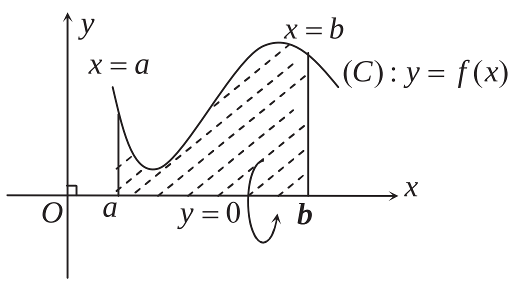
2. Nếu phương trình f(x) = 0 có k nghiệm phân biệt x_1 , x_2 , …, x_k thuộc (a ; b) thì trên mỗi khoảng (a ; x_1) , (x_1 ; x_2) , …, (x_k ; b) biểu thức f(x) có dấu không đổi .

Khi đó để tính tích phân $S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx$ ta có thể tính như sau :

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_k}^{b} f(x)dx\right|$$

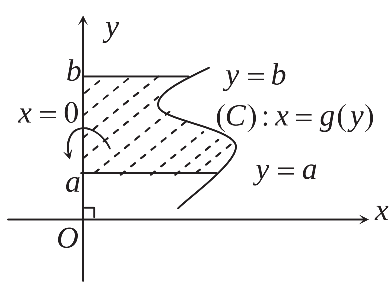
2. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng quay quanh trục Ox, Oy

Dạng 1: Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b\ \left(a < b\right)$ quay xung quanh trục Ox là: $\boxed{V_{\mathrm{Ox}} = \pi\int_a^b \left[f\left(x\right)\right]^2 dx}$.



Chú ý: Hàm số $y = f\left(x\right) \geq 0 \quad \forall x \in \left[a;b\right]$ và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Dạng 2: Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = f\left(y\right)$, trục Oy và hai đường thẳng $y = a$ và $y = b\ \left(a < b\right)$ quay xung quanh trục Oy là: $\boxed{V_{\mathrm{Oy}} = \pi\int_a^b \left[f\left(y\right)\right]^2 dy}$.



Chú ý: Hàm số $x = f\left(y\right) \ge 0 \quad \forall y \in \left[a;b\right]$ và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Dạng 3: Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục, cùng dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số trên và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ $\left(a < b\right)$ quay xung quanh trục Ox tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là: $\boxed{\mathrm{V}_{Ox} = \pi\int\limits_a^b \left|\left[f\left(x\right)\right]^2 - \left[g\left(x\right)\right]^2\right| dx}$

Dạng 4: Cho hai hàm số $x = f\left(y\right)$ và $x = g\left(y\right)$ liên tục, cùng dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số trên và hai đường thẳng $y = a$ và $y = b$ $\left(a < b\right)$ quay xung quanh trục Ox tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là: $\boxed{\mathrm{V}_{Oy} = \pi\int\limits_a^b \left|\left[f\left(y\right)\right]^2 - \left[g\left(y\right)\right]^2\right| dx}$

Tóm lại khi giải toán ta thường gặp các dạng sau:

1. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a; x = b \end{cases}$ *quanh Ox một vòng là :* $V_{\mathrm{Ox}} = \pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right).dx$.

2. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases}$ *quanh Ox một vòng là :* $V_{\mathrm{Ox}} = \pi\int\limits_a^b \left|f^2\left(x\right) - g^2\left(x\right)\right|.dx$.

3. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} x = f(y) \\ x = 0 \\ y = a; y = b \end{cases}$ *quanh Oy một vòng là :* $V_{Oy} = \pi\int\limits_a^b f^2\left(y\right).dy$.

4. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} x = f(y) \\ x = g(y) \\ y = a; y = b \end{cases}$ *quanh Oy một vòng là :* $V_{Oy} = \pi\int\limits_a^b \left|f^2\left(y\right) - g^2\left(y\right)\right|.dy$.

PHẦN IV. SỐ PHỨC

I. SỐ PHỨC

1. Khái niệm số phức

+ Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi;\ (a,b \in \mathbb{R})$. Trong đó : a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.

+ Tập hợp số phức kí hiệu: $\mathbb{C}$.

+ z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 $(b = 0)$.

+ z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $\Leftrightarrow$ phần thực bằng 0 $(a = 0)$.

Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

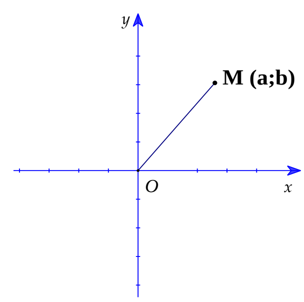
2. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức $z_1 = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di\ (c,\ d \in \mathbb{R})$ bàng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.

Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

3. Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ hay bởi $\vec{u} = (a;b)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy.



4. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ là $\bar{z} = a - bi$.

Một số tính chất:

+ $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z'}$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z.\bar{z} = a^2 + b^2$.

+ z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $z = -\bar{z}$.

5. Môđun của số phức

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Vậy $|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ hay $|z| = |a + bi| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Một số tính chất:

+ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = \left|\overrightarrow{OM}\right|$; $|\bar{z}| = |z|$

+ $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C};\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

+ $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$; $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

+ $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

II. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC

1. Phép cộng và phép trừ số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi \ \left(a,\ b \in \mathbb{R}\right)$ và $z_2 = c + di \ \left(c,\ d \in \mathbb{R}\right)$. Khi đó:

+ $z_1 \pm z_2 = \left(a + c\right) \pm \left(b + d\right)i$

+ Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.

+ Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số thực đó: $z = a + bi, z + \bar{z} = 2a$.

2. Phép nhân số phức

+ Cho hai số phức $z_1 = a + bi \ \left(a,\ b \in \mathbb{R}\right)$ và $z_2 = c + di \ \left(c,\ d \in \mathbb{R}\right)$. Khi đó

$$z_1 z_2 = \left(a + bi\right)\left(c + di\right) = \left(ac - bd\right) + \left(ad + bc\right)i.$$

+ Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi \ \left(a,\ b \in \mathbb{R}\right)$, ta có

$$k.z = k.\left(a + bi\right) = ka + kbi.$$

Đặc biệt: $0.z = 0$ với mọi số phức z.

+ Lũy thừa của i **:** $i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2.i = -i$

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Phép chia hai số phức z' và $z \neq 0$ là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'.\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'.\bar{z}}{z.\bar{z}}$.

III. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp:

+ $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng

+ $x = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung Oy

+ $y = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành Ox

+ $\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là *hình tròn* tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính R

+ $\left[\begin{array}{l}\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\end{array}\right. \Rightarrow$ tập hợp điểm là *đường tròn* có tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

+ $x > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung

+ $y < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành

+ $x < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung

+ $y > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là phía trên trục hoành

+ $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol

+ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip

+ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol

IV. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

a. Căn bậc hai của số thực âm

+ Cho số z, nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^2 = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z.

+ Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.

+ Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

b. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, \forall a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy:

+ Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.

+ Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

+ Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z + z_2| = r, (r > 0)$ $\begin{cases} \max|z| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| + \dfrac{r}{|z_1|} \\ \min|z| = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| - \dfrac{r}{|z_1|}\right| \end{cases}$.

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z - z_2| = r_1, (r_1 > 0)$.

$$\boxed{\max P = \left|\dfrac{z_2}{z_1} - z_3\right| + \dfrac{r_1}{|z_1|} \text{ và } \min P = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1} - z_3\right| - \dfrac{r_1}{|z_1|}\right|}$$

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z + z_2| + |z_1.z - z_2| = k, \ (k > 0)$.

$$\boxed{\max|z| = \dfrac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min|z| = \dfrac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}}$$

PHẦN V. KHỐI ĐA DIỆN

I- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN:

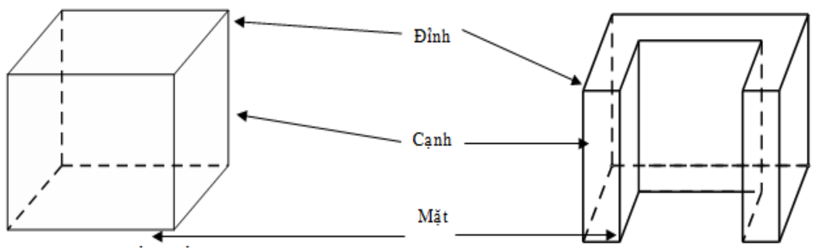
1. Khái niệm về hình đa diện:

• Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

• Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

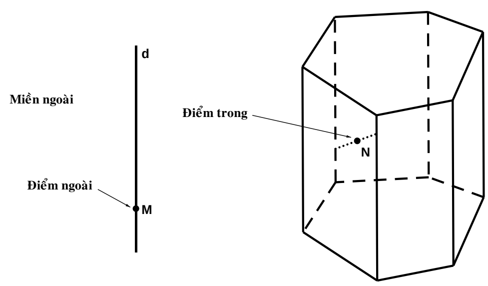


2. Khái niệm về khối đa diện:

• Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

• Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

• Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.



III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU:

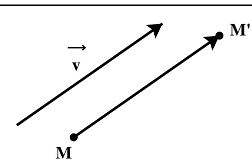
1. Phép dời hình trong không gian:

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

** Một số phép dời hình trong không gian:*

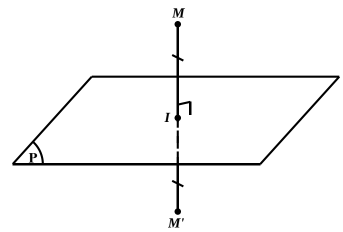
a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$:

Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.	

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P):

Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

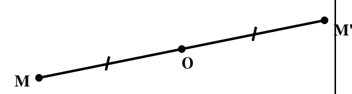
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).



c) Phép đối xứng qua tâm O:

Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM'.

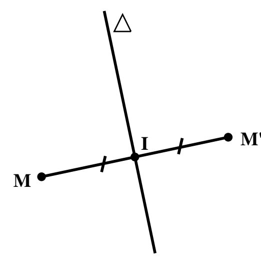
Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H)



d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ):

Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H)



* *Nhận xét:*

- *Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.*
- *Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').*

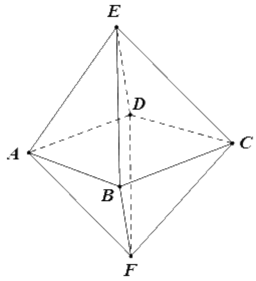
2. Hai hình bằng nhau:

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

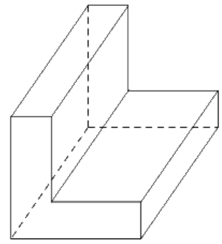
KHỐI ĐA DIỆN LỒI

I. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là *khối đa diện lồi* nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.



Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

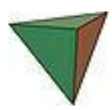
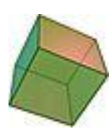
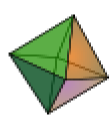
II. Khối đa diện đều

1. Định nghĩa: *Khối đa diện đều* là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

+ Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
+ Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

2. Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		*Số đỉnh*	*Số cạnh*	*Số mặt*	*Loại*	*Số MPĐX*
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15

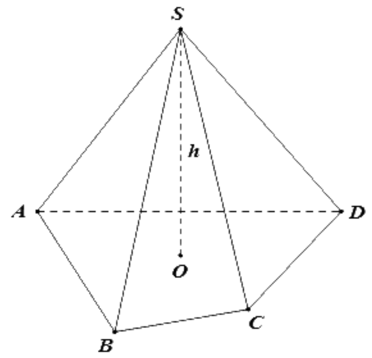
Khối đa diện đều loại $\{n, p\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$.

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích khối chóp: $\boxed{V = \frac{1}{3} S_{đáy}.h}$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
+ h: Độ dài chiều cao khối chóp.

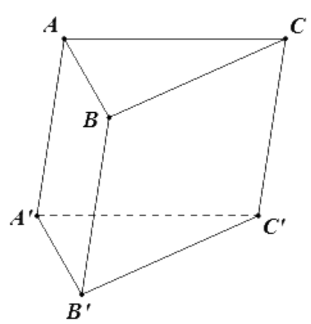
$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d_{(S,(ABCD))}.S_{ABCD}}$$

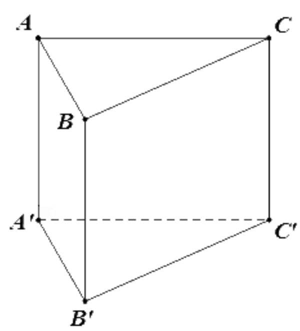


Thể tích khối lăng trụ: $\boxed{V = S_{đáy}.h}$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
+ h: Chiều cao của khối chóp.

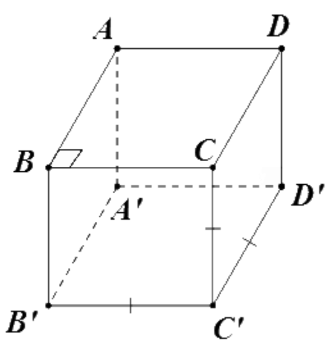
Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.

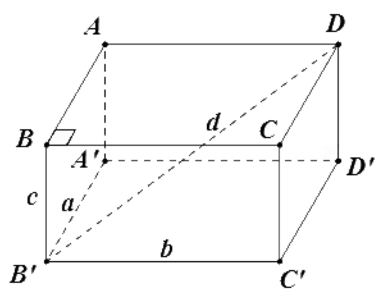




Thể tích khối hộp chữ nhật: $\boxed{V = a.b.c}$

Thể tích khối lập phương: $\boxed{V = a^3}$





** Chú ý:*

- *Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$*
- *Đường chéo của hình lập phương cạnh a là : $a\sqrt{3}$*
- *Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là : $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$*
- *Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$*

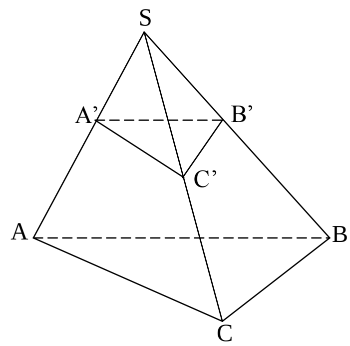
Tỉ số thể tích:

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}}$$

Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$$

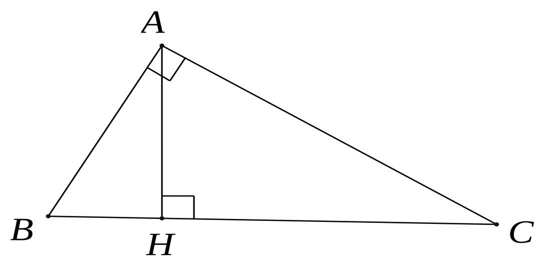
Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao.



CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.



- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 = BH.BC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $AH^2 = BH.HC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B$

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là: *a, b, c độ dài các trung tuyến là* m_a, m_b, m_c *bán kính đường tròn ngoại tiếp R; bán kính đường tròn nội tiếp r nửa chu vi p.*

- Định lí hàm số cosin:

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;\; b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B;\; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$
- Định lí hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- Độ dài trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4};\; m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4};\; m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

- $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c$
- $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca.\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \dfrac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- CT He-ron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- ΔABC *vuông tại A:* $S = \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{BC.AH}{2}$
- ΔABC *đều, cạnh a:* $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Hình vuông: $S = a^2$ *(a: cạnh hình vuông)*

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ *(a, b: hai kích thước)*

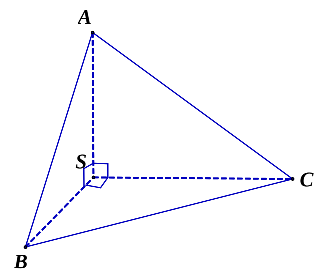
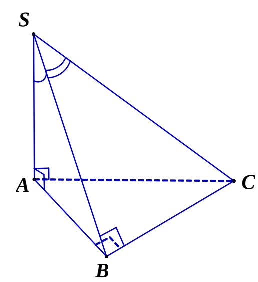
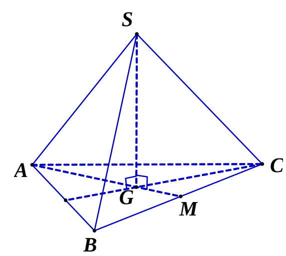
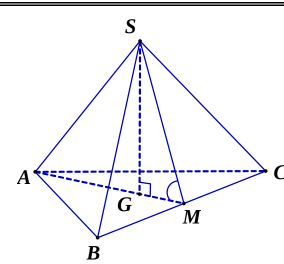
d) Hình bình hành: $S = đáy \times cao = AB.AD.\sin BAD$

e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin BAD = \frac{1}{2}AC.BD$

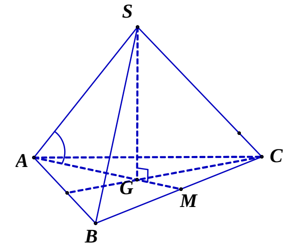
f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}\left(a+b\right)h$ *(a, b: hai đáy, h: chiều cao)*

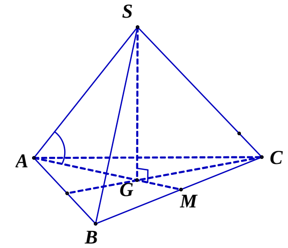
g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}AC.BD$

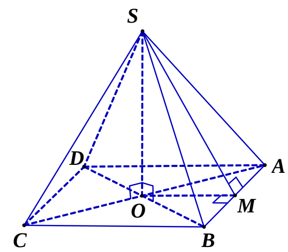
MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

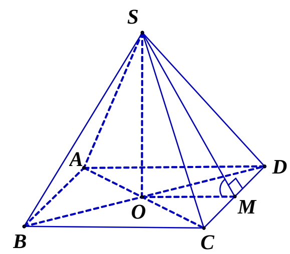
TÍNH CHẤT	HÌNH VẼ
Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng $\left(SAB\right),\left(SBC\right),\left(SAC\right)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$	
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với $\left(ABC\right)$, hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SBC\right)$ vuông góc với nhau, $BSC = \alpha, ASB = \beta$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\tan\alpha}{24}$	

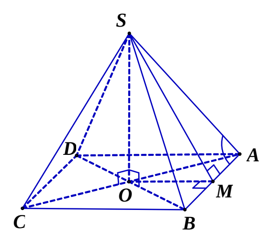
<table>
<tr>
<td>Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β.

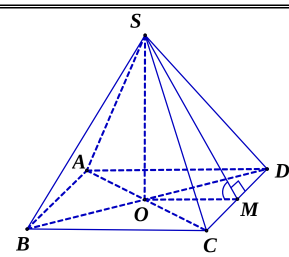
$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta\cos^2\beta}{4}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β.

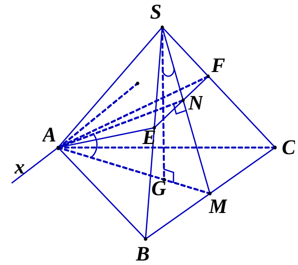
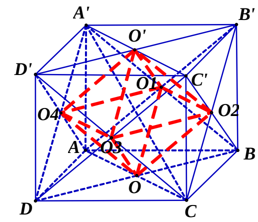
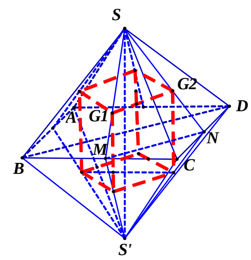
$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{a^3.\tan\beta}{12}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3.\tan\alpha}{6}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $SAB = \alpha$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\cot\alpha}{24}$	
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V=\dfrac{a^3}{6}$	
Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương. Khi đó: $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27}$	

CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN (ĐTD):

ĐIỀU KIỆN TỨ DIỆN	CÔNG THỨC
$\begin{cases} SA=a, SB=b, SC=c \\ ASB=\alpha, BSC=\beta, CSA=\varphi \end{cases}$	$V_{S.ABC}=\dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$ *Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện*
$\begin{cases} AB=a, CD=b \\ d(AB,CD)=d, (AB,CD)=\alpha \end{cases}$	$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$ *Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó*
$\begin{cases} S_{\Delta SAB}=S_1, S_{\Delta SAC}=S_2, SA=a \\ ((SAB),(SAC))=\alpha \end{cases}$	$V_{SABC}=\dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ *Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề*
$\begin{cases} SA=a, SB=b, SC=c \\ ((SAB),(SAC))=\alpha \\ ASB=\beta, ASC=\varphi \end{cases}$	$V_{S.ABC}=\dfrac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$ *Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện*
Tứ diện đều tất cả các cạnh bằng a	$V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Tứ diện gần đều $\begin{cases} AB=CD=a \\ AC=BD=b \\ AD=BC=c \end{cases}$	$V_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$

MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

I. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

1) Mặt nón tròn xoay.

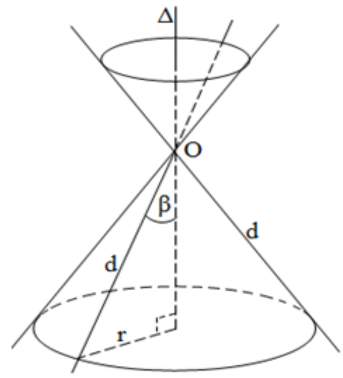
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$, $mp(P)$ chứa d, Δ. (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi

$\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O.

+ Δ gọi là trục.

+ d được gọi là đường sinh.

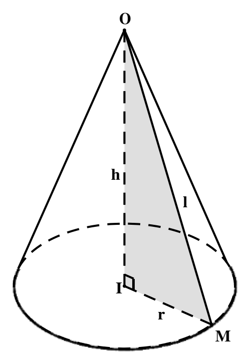
+ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.



2) Khối nón

+ Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón.

+ Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.



Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***<u>Diện tích xung quanh:</u>*** của hình nón: $\boxed{S_{xq} = \pi r l}$.

+ ***Diện tích đáy (hình tròn):*** $\boxed{S_{đáy} = \pi r^2}$.

+ ***<u>Diện tích toàn phần:</u>*** của hình nón: $\boxed{S_{tp} = \pi r l + \pi r^2}$.

+ ***<u>Thể tích khối nón:</u>*** $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

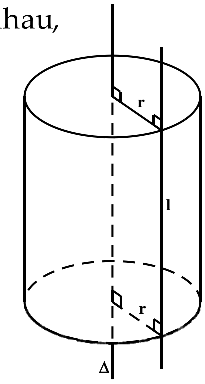
3) Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng

❖**Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) đi qua đỉnh của mặt nón.**	
$mp(Q)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh. $mp(Q)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh.	Thiết diện là tam giác cân. (Q) là mặt phẳng tiếp diện của hình nón.
❖**Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) không đi qua đỉnh của mặt nón.**	
$mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón. $mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón. $mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón.	Giao tuyến là 1 đường parabol. Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol. Giao tuyến là một đường tròn.

II. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Mặt trụ:

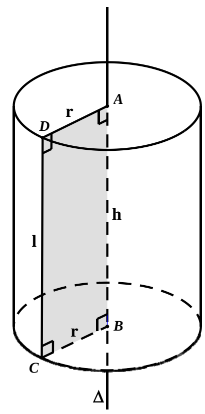
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.



- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng l là đường sinh.
- r là bán kính của mặt trụ đó.

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay:

a) Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.



+ Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.

+ Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.

+ Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

+ Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

b) Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.

Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***Diện tích xung quanh:*** $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$.

+ ***Diện tích toàn phần:*** $\boxed{S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2}$.

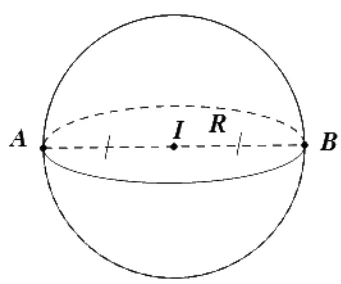
+ ***Thể tích:*** $\boxed{V = \pi r^2 h}$.

III. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

1. Mặt cầu

Cho điểm I cố định và một số thực dương R.

Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.

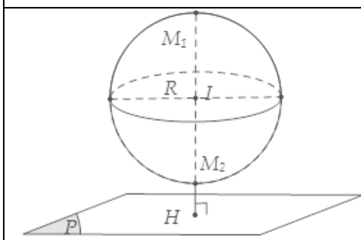
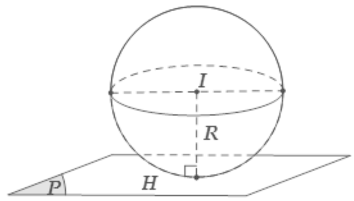
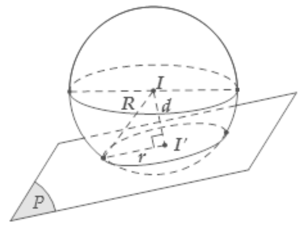


Kí hiệu: $S(I;R)$. Khi đó:

$$\boxed{S(I;R) = \{M \mid IM = R\}}$$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

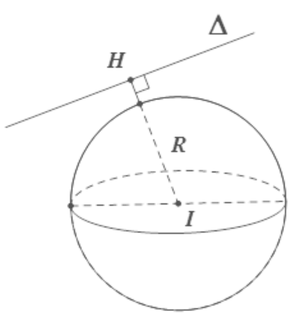
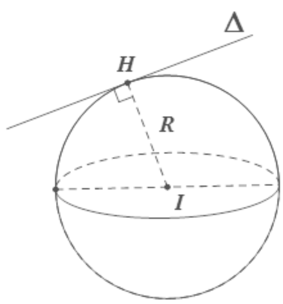
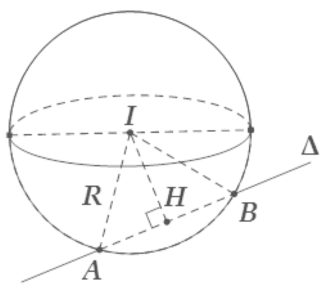
Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $\left(P\right) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng $\left(P\right)$. Khi đó:

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: $\left(P\right)$ là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

Lưu ý: Khi mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng $\left(P\right)$ được gọi là **<u>mặt phẳng kính</u>** và thiết diện lúc đó được gọi là **<u>đường tròn lớn.</u>**

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của $\left(S\right)$ và H: **tiếp điểm.**	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

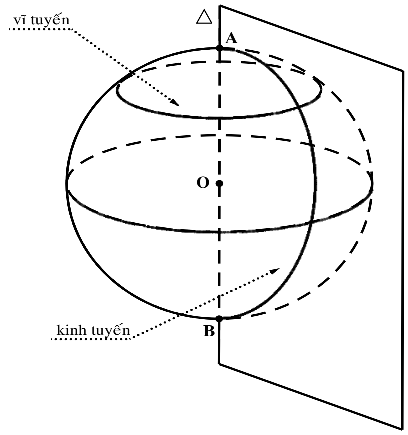
Δ cắt $\left(S\right)$ tại 2 điểm A, B thì bán kính R của $\left(S\right)$: $\begin{cases} d\left(I;\Delta\right) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu:

+ Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến.

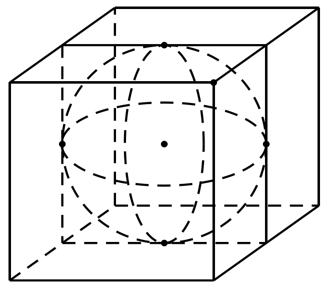
+ Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.

+ Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu



** Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:*

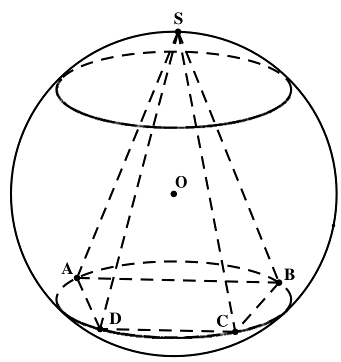
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.



Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu.

Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi:

$OA = OB = OC = OD = OS = r$



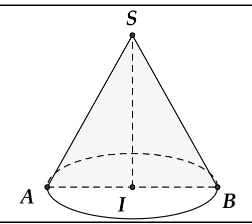
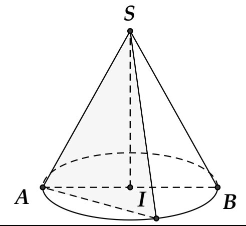
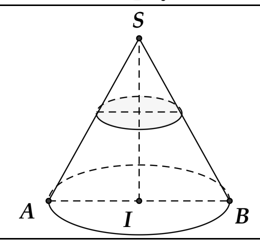
Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$

+ *Diện tích mặt cầu:* $\boxed{S = 4\pi R^2}$.

+ *Thể tích khối cầu:* $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT NÓN

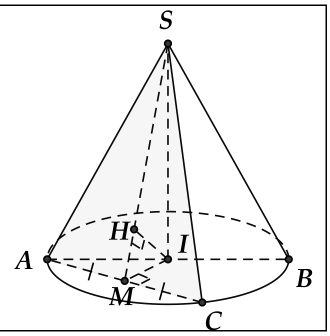
Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

Thiết diện qua trục *của hình nón là tam giác cân.*	
Thiết diện qua đỉnh *của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.*	
Thiết diện vuông góc với trục *của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.*	

Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh l.

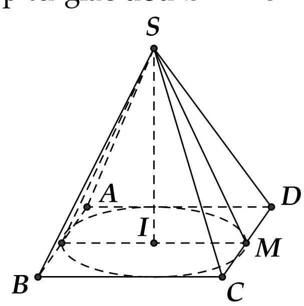
Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d.

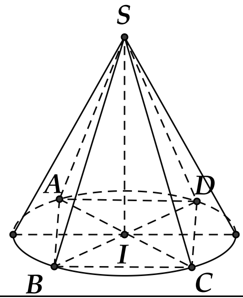
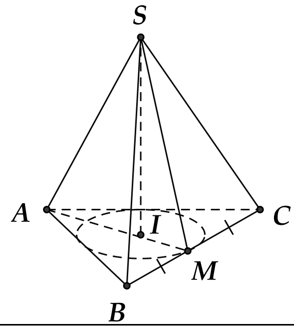
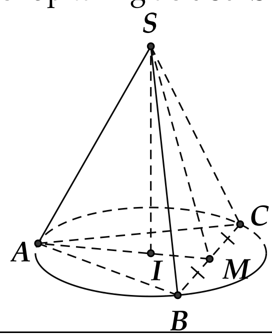
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: + $AC \perp (SMI)$ + Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc SMI. + Góc giữa (SAC) và SI là góc MSI. + $d(I,(SAC)) = IH = d$.	

Diện tích thiết diện:

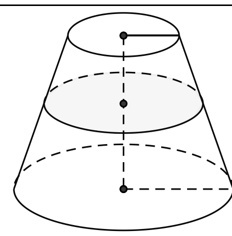
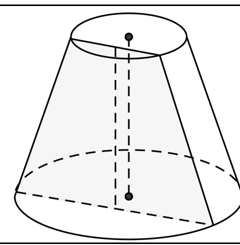
$$S_{td} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}\sqrt{SI^2 + IM^2}.2\sqrt{AI^2 - IM^2} = \sqrt{r^2 - \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}.\sqrt{h^2 + \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}$$

Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

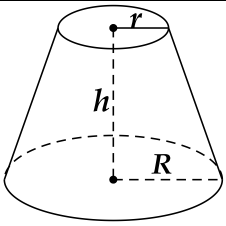
Hình nón ***nội tiếp*** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, + Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 

Hình nón ***ngoại tiếp*** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$. + Chiều cao: $h = SI$. + Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 
Hình nón ***nội tiếp*** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có + Bán kính đáy: $r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$. + Chiều cao: $h = SI$. + Đường sinh: $l = SM$.	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$ 
Hình nón ***ngoại tiếp*** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy: $r = IA = \frac{2AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$. + Chiều cao: $h = SI$. + Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$ 

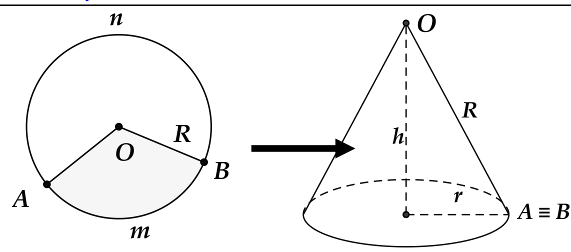
Dạng 4. Bài toán hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là ***hình nón cụt***.	
+ Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.	
+ Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.	

Cho hình nón cụt có $R,\ r,\ h$ lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao.	*Diện tích xung quanh* của hình nón cụt: $\boxed{S_{xq} = \pi l\left(R + r\right)}$. Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{\begin{cases} S_{đáy1} = \pi r^2 \\ S_{đáy2} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{đáy} = \pi\left(r^2 + R^2\right)}$.

	*Diện tích toàn phần* của hình nón cụt: $\boxed{S_{tp} = \pi l\left(R + r\right) + \pi r^2 + \pi R^2}$. *Thể tích* khối nón cụt: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$.

Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Từ hình tròn $\left(O;R\right)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung AnB bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó.	 Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{2\pi}{x}. \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$

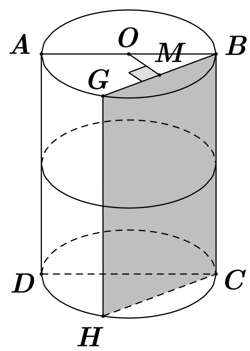
MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ

Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

+ Thiết diện ***vuông góc trục*** là một đường tròn bán kính R.

+ Thiết diện ***chứa trục*** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$.

+ Thiết diện ***song song với trục*** và ***không chứa trục*** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO';\left(BGHC\right)\right) = OM$



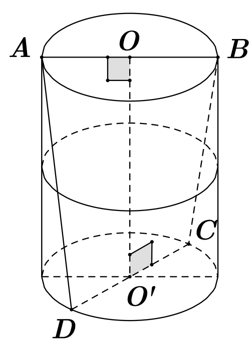
Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\left(AB,CD\right)$$

* Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì:

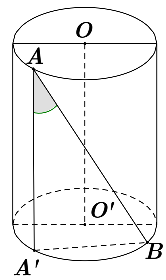
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.$$



Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

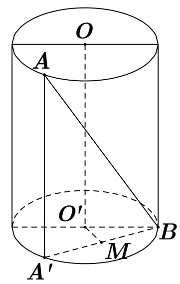
+ Góc giữa AB và trục OO':

$$\left(AB;OO'\right) = A'AB.$$



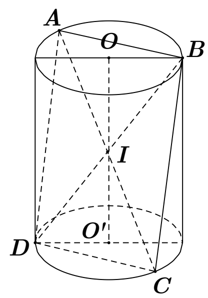
+ Khoảng cách giữa AB và trục OO':

$$d\left(AB;OO'\right) = OM.$$



+ Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ.

Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}$.



Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

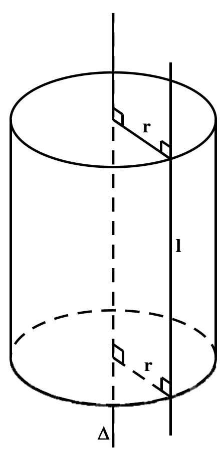
Một khối trụ có thể tích V không đổi.

+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:

$$S_{tp}\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} \end{cases}$$

+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất:

$$S\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \end{cases}$$



Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

+ Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \dfrac{4\pi V}{9}$

+ Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ *ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là* $S_{xq} = \dfrac{2S}{\pi}$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI
BÀI TOÁN MẶT CẦU

I. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

1/ Các khái niệm cơ bản

+ **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.
+ **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
+ **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

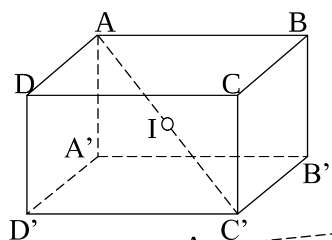
+ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.
+ **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

a/ Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

- **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) $\Rightarrow$ Tâm là I là trung điểm của AC'.
- **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$ Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.

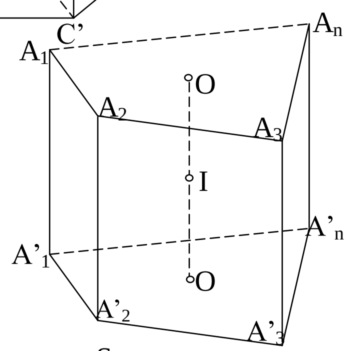


b/ Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A'_1A'_2A'_3...A'_n$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó,

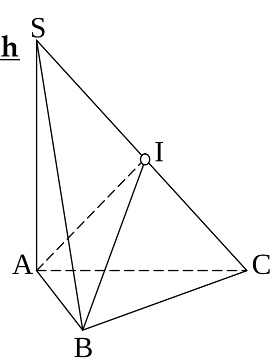
mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

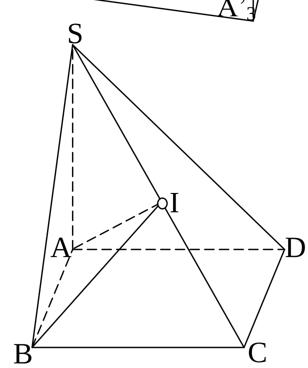
- **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA'_n$.



c/ Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.

- Hình chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.





- Hình chóp $S.ABCD$ có

$SAC = SBC = SDC = 90^0$.

+ Tâm: I là trung điểm của SC.

+ Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.

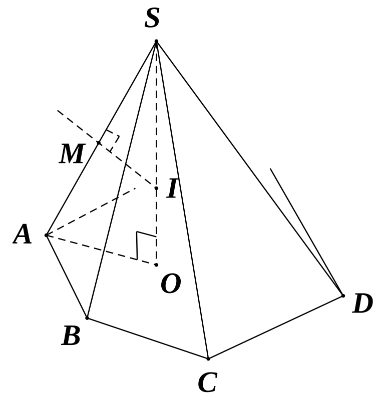
d/ <u>Hình chóp đều</u>.

Cho hình chóp đều $S.ABC...$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow$ SO là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên,

chẳng hạn như $mp\left(SAO\right)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA

là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.



- Bán kính:

Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

$$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$$

e/ <u>Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy</u>.

Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $\left(ABC...\right)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

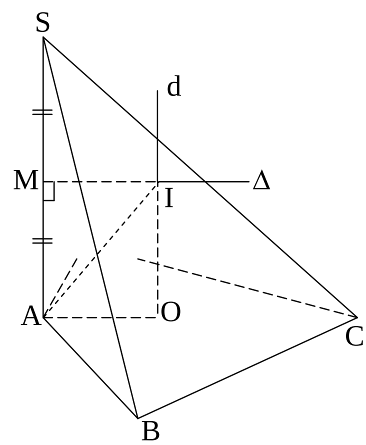
- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn

đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp\left(ABC...\right)$ tại O.

- Trong $mp\left(d, SA\right)$, ta dựng đường trung

trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$



- <u>Tìm bán kính</u>:

Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét ΔMAI vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

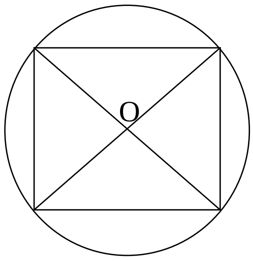
f/ <u>Hình chóp khác.</u>

- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực $\left(\alpha\right)$ của một cạnh bên bất kì.
- $\left(\alpha\right) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

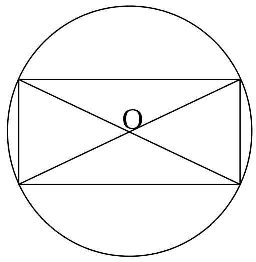
-

g/ <u>Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.</u>

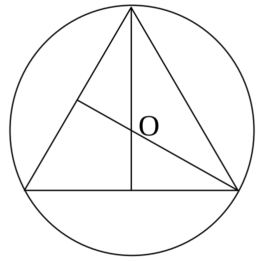
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy.



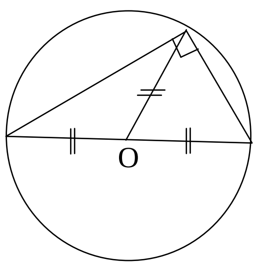
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



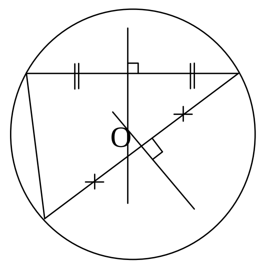
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



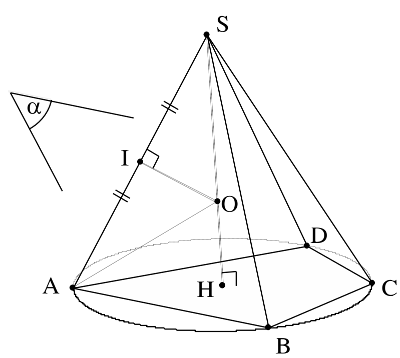
Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

II. KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP CHÓP

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). *Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:*



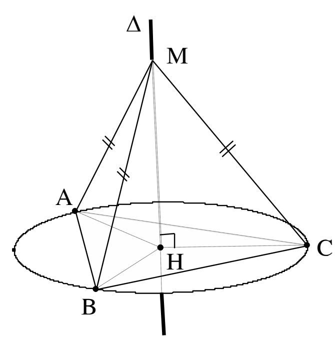
<u>Bước 1</u>: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

<u>Bước 2</u>: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó : - Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$

- Bán kính: $R = SA(= SO)$. Tuỳ vào từng trường hợp.

Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.



1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Tính chất: $\forall M \in \Delta: \quad MA = MB = MC$

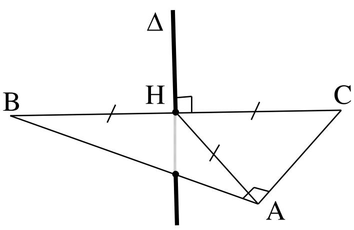
Suy ra: $MA = MB = MC \iff M \in \Delta$

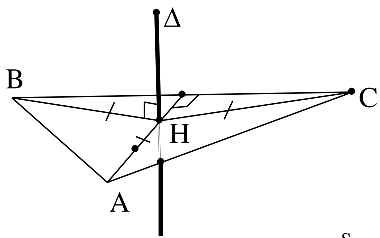
2. Các bước xác định trục:

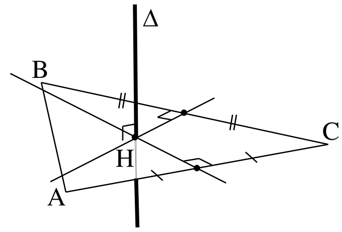
- <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

Một số trường hợp đặc biệt

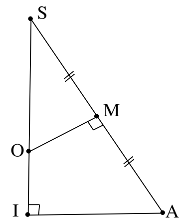
<u>Tam giác vuông</u> <u>Tam giác đều</u> <u>Tam giác bất kì</u>







3. Kỹ năng tam giác đồng dạng



ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}$.

4. <u>Nhận xét</u>:

$\exists M, S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

*** KỸ THUẬT SỬ DỤNG HAI TRỤC XÁC ĐỊNH TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP ĐA DIỆN**

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thõa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). **Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:**

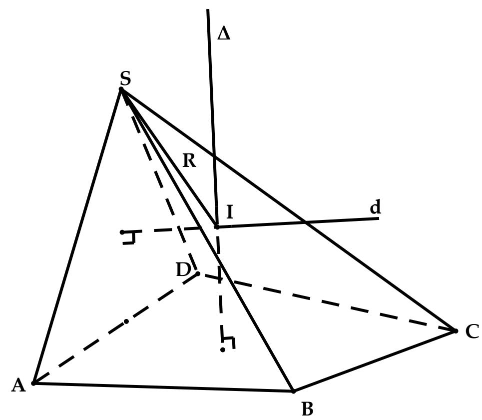
<u>Bước 1:</u> Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

<u>Bước 2:</u> Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (*dễ xác định*) của khối chóp.

Lúc đó:

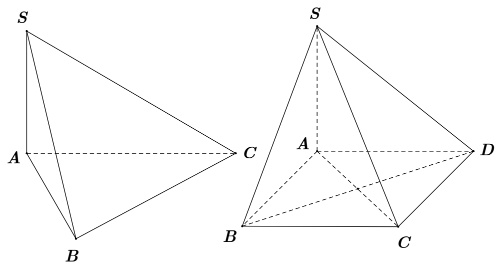
+ Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$

+ Bán kính: $R = IA(= IS)$. *Tuỳ vào từng trường hợp.*

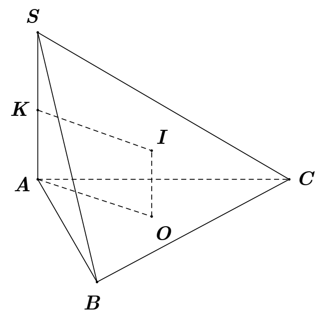


TỔNG KẾT CÁC DẠNG TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU (ĐTD)

Loại 1: Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $ABC = 90^0$ khi đó $\boxed{R = \dfrac{SC}{2}}$ và tâm là trung điểm SC.



Loại 2: Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D, khi đó : $\boxed{R^2 = R_D^2 + \dfrac{SA^2}{4}}$.



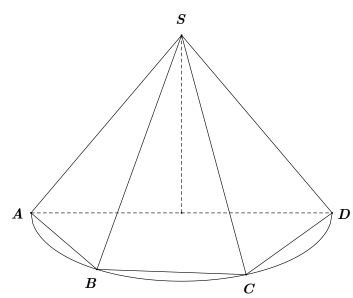
\+ $\boxed{R_D = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$ (p: nửa chu vi).

\+ Nếu $\Delta\ ABC$ vuông tại A thì: $\boxed{R^2 = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + AS^2\right)}$.

\+ Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Loại 3: Chóp có các cạnh bên bằng nhau:

$SA = SB = SC = SD$: $\boxed{R = \dfrac{SA^2}{2SO}}$.

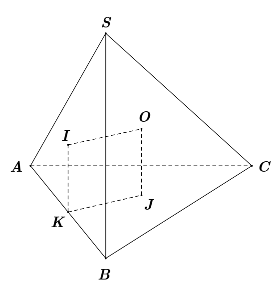


\+ $ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo.

\+ ΔABC vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền.

\+ ΔABC đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.

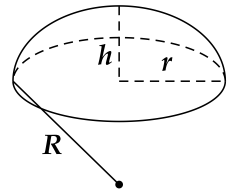
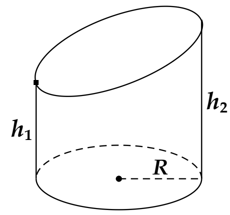
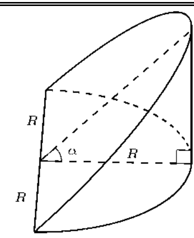
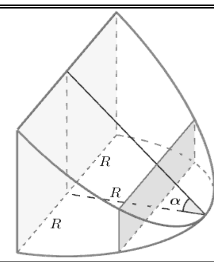
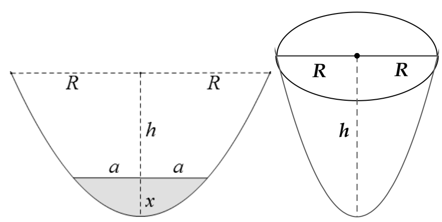
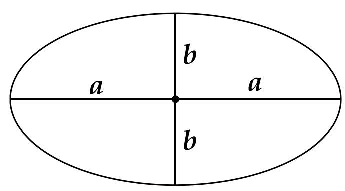
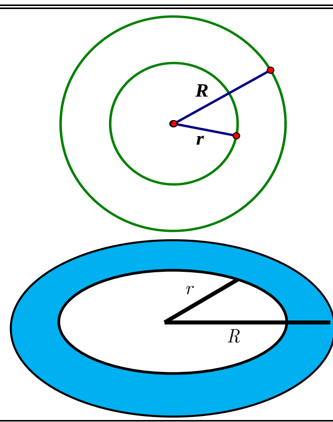
Loại 4: Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp:



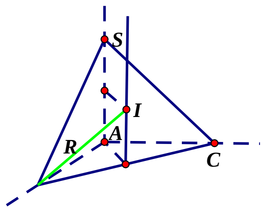
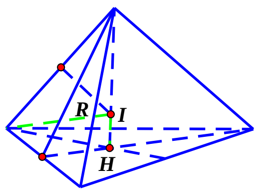
$$\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

Loại 5 : Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH, tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O. Khi đó ta giải phương trình: $(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$. Với giá trị x tìm được ta có: $\boxed{R^2 = x^2 + R_D^2}$.

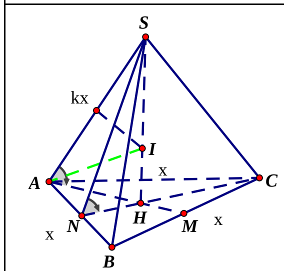
Loại 6: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $\boxed{r = \dfrac{3V}{S_{tp}}}$.

<table>
<tr><td>Chỏm cầu:</td><td>$$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right) \\ V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = \dfrac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right) \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Hình trụ cụt:
(phiến trụ)</td><td>$$\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Hình nêm loại 1:</td><td>$$V = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Hình nêm loại 2:</td><td>$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)R^3\tan\alpha$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Parabol bậc hai. Parabol tròn xoay.</td><td>$$\begin{cases} S_{parabol} = \dfrac{4}{3}Rh; \quad \dfrac{S'}{S} = \left(\sqrt{\dfrac{x}{h}}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{R}\right)^3 \\ V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}V_{trụ} \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip</td><td>$$\begin{cases} S_{elip} = \pi ab \\ V_{xoay\ quanh\ 2a} = \dfrac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{xoay\ quanh\ 2b} = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Hình xuyến</td><td>Diện tích hình vành khăn $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$
Thể tích hình xuyến (phao)
$$V = 2\pi^2\left(\frac{R + r}{2}\right)\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$$</td><td>
</td></tr>
</table>

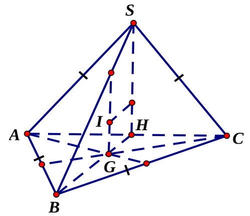
<table>
<tr><th>Hình</th><th>Đường cao

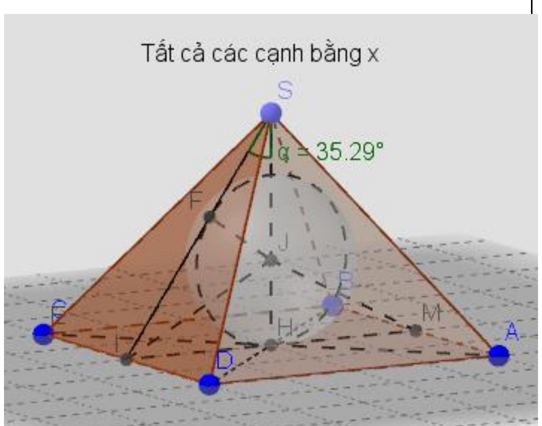
Và thể tích</th><th>Bán kính khối cầu ngoại tiếp R và nội tiếp r</th><th>Khoảng cách từ Chân đường cao đến mặt bên chứa đỉnh</th><th>Khoảng cách 2 đường chéo nhau</th><th>Góc tạo bởi 2 mặt</th><th>Khoảng cách điểm đến mặt</th></tr>
<tr><td>Tứ diện vuông

</td><td>$V=\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$
S_1,S_2,S_3 lần lượt diện tích tam giác SAB,SAC,SBC</td><td>$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$</td><td>$\frac{1}{d^2(A;(SBC))}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Tứ diện đều cạnh x</td><td>$SH=x\frac{\sqrt{6}}{3}$
$V=\frac{\sqrt{2}}{12}x^3$</td><td>$R=x\frac{\sqrt{6}}{4}$
$r=IH=x\frac{\sqrt{6}}{12}$
$R=3r$</td><td>$d_H=0.198x$</td><td>$d=\frac{x}{\sqrt{2}}$</td><td>$70^0 31'$</td><td>$d(A;(SBC))$
$\approx 0.594x$</td></tr>
<tr><td>Hình</td><td>Đường cao

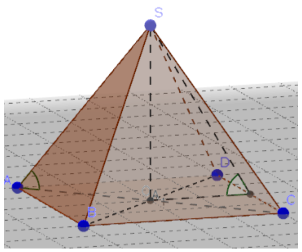
Và thể tích</td><td>Bán kính khối cầu ngoại tiếp R và nội tiếp r</td><td>Khoảng cách từ Chân đường cao đến mặt bên chứa đỉnh</td><td>Khoảng cách 2 đường chéo nhau</td><td>Góc tạo bởi 2 mặt</td><td>Khoảng cách điểm đến mặt</td></tr>
<tr><td>

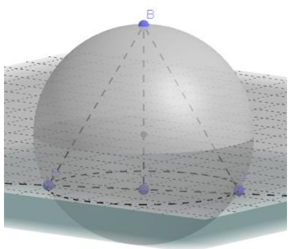
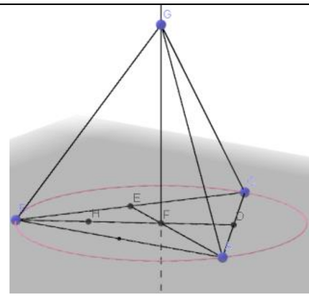
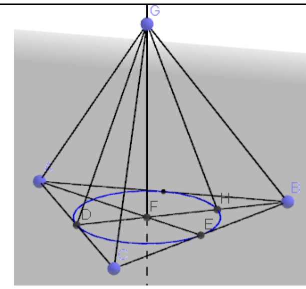
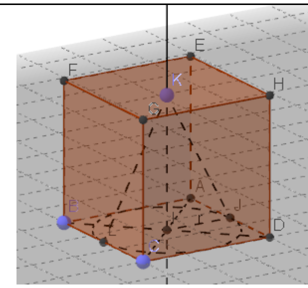
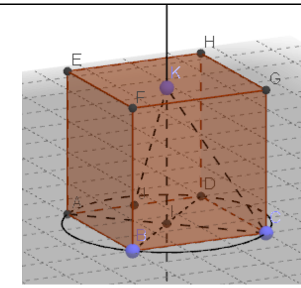
Chóp đều</td><td>$SH=x\sqrt{k^2-\frac{1}{3}}=$
$\frac{x}{\sqrt{3}}\tan\alpha=\frac{x}{2\sqrt{3}}\tan\beta$</td><td>$R=\frac{x}{\sqrt{4-\frac{4}{3k^2}}}$</td><td>$d_H=\frac{\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{36k^2+15}}x$</td><td>$d_{(SA;BC)}$
$=x.\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4k^2}}$</td><td></td><td>$d(A;(SBC))$
$=3d_H$</td></tr>
</table>

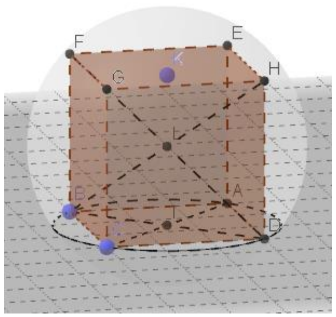
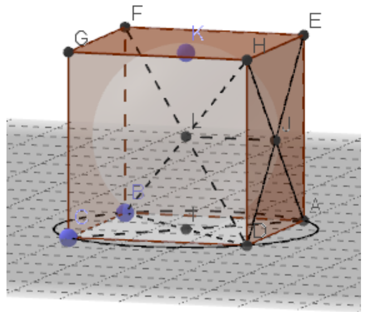
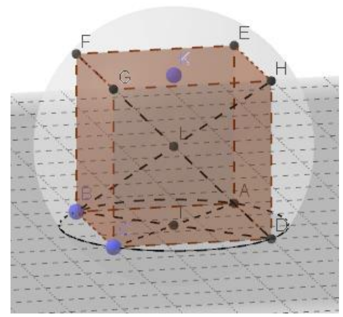
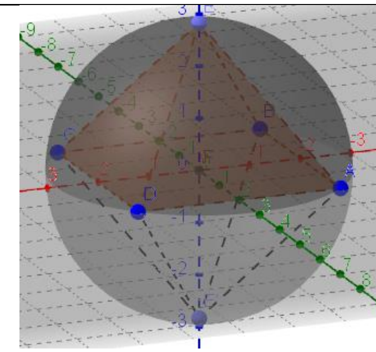
 ABC,SAC đều cạnh x. (SAC) vuông góc với đáy.	SH là đường cao của tam giác SAC cũng là đường cáo của chóp S.ABC $SH = x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $S_{ABC} = x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $V_{S.ABC} = \dfrac{x^3}{8}$	$R = x\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ $V_{(S)} = \dfrac{5\sqrt{15}}{54}x^3\pi$	$d(\mathrm{H;SBC})$ $= \mathrm{d(H;SAB)} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}x$	$d(A;SBC) =$ $d(C;\mathrm{SAB}) =$ $2d_H = \dfrac{\sqrt{15}}{5}x$	$(SBA;SBC) = 78^0 43'$ $(SBA;\mathrm{ABC}) =$ $(SBC;\mathrm{ABC})$ $= 63^0 42'$	

Hình chóp đều S.ABCD có các cạnh bằng **x**	Đường cao Và thể tích	**Bán kính khối cầu ngoại tiếp R và nội tiếp r**	Khoảng cách từ **Chân đường cao** đến **mặt bên chứa đỉnh**	**Khoảng cách 2 đường chéo nhau**
	$SH = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt{2}}.\mathrm{x}^2$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3$	$R = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ $\mathrm{r} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}x$ $\approx 0,2588x$ $V_{cau\_ngoai} = \dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{x}{\sqrt{2}})^3$	H cách đều các mặt bên $d(H;SAB) = \dfrac{x}{\sqrt{6}}$ Khoảng cách A,B,C,D xuống mặt đối diện là $= 2d_H = \dfrac{2x}{\sqrt{6}}$	$d(SA;BC) = d(B;SAD) = \dfrac{2x}{\sqrt{6}}$ Khoảng cách từ cạnh đáy AB,AD,BC,CDđến các đường trong mặt đối diện là $\dfrac{2x}{\sqrt{6}}$

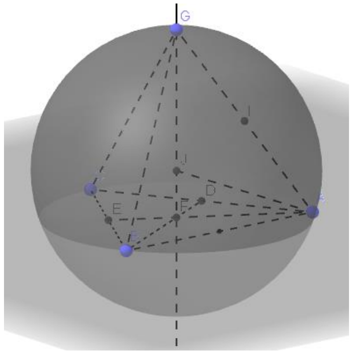
	$\dfrac{V_{cau\ ngoai}}{V_{Chop}} = 2\pi$	$d(A;SCB) = \dfrac{2x}{\sqrt{6}}$ $= d(A;SCB) = \dfrac{2x}{\sqrt{6}}$	$d(SA;BC) = d(AB;SC) = \dfrac{2x}{\sqrt{6}}$

Hình chóp đều S.ABCD hình vuông có các cạnh bằng **x,cạnh bên kx.**	**Đường cao** **Và thể tích**	**Bán kính khối cầu ngoại tiếp R và nội tiếp r**	Khoảng cách từ **Chân đường cao** đến **mặt bên chứa đỉnh**	**Khoảng cách 2 đường chéo nhau**
 Cho góc thì tìm ra cạnh bên. $k = \dfrac{Canh\_ben}{canh\_day}$	$SH = x\sqrt{\dfrac{2k^2-1}{2}}$ $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}x^3\sqrt{\dfrac{2k^2-1}{2}}$	$R = \dfrac{k^2}{\sqrt{2(2k^2-1)}}x$ $V_{cau\_ngoai} =$ $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{k^2}{\sqrt{2(2k^2-1)}}x\right)^3$	H cách đều các mặt bên $d(H;SCD) = \sqrt{\dfrac{2k^2-1}{2(2k^2+1)}}.x$ Khoảng cách A,B,C,D xuống mặt đối diện là $d(A;SCD) = 2d(H;SCD)$ $= 2\sqrt{\dfrac{2k^2-1}{2(2k^2+1)}}.x$	Khoảng cách giữa cạnh đáy và cạnh bên của mặt đối diện bằng nhau $d(AB;SC) =$ $2d(H;SCD)$ $= 2\sqrt{\dfrac{2k^2-1}{2(2k^2+1)}}.x$
	$\dfrac{V_{cau\_ngoai}}{V_{S.ABCD}} = 2\pi.\dfrac{k^2}{2k^2-1}$			

Nón trong cầu	Nón ngoại tiếp tứ diện đều cạnh x	Nón nội tiếp tứ diện đều cạnh x	Nón nội tiếp khối lập phương cạnh x	Nón ngoại tiếp hình lập phương cạnh x
 $$\frac{V_{(S)}}{V_N}=\frac{4(\frac{R}{h})^3}{2\frac{R}{h}-1}$$	 Đáy nón ngoại tiếp ABC $$R_{Non}=\frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{3}$$	 Đáy nón nội tiếp tam giác đều cạnh x $$r_{Non}=EF=\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{6}$$	 $$r_{Non}=\frac{x}{2}$$ $$\frac{V_n}{V_{LapPhuong}}$$ $$=\frac{\frac{1}{3}x.\pi(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\frac{\pi}{12}$$	 $$R_{Non}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$$ $$\frac{V_n}{V_{LapPhuong}}$$ $$=\frac{\frac{1}{3}x.\pi(\frac{x\sqrt{2}}{2})^2}{x^3}=\frac{\pi}{6}$$

Cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh x	Cầu nội tiếp hình lập phương cạnh x	Cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật	Cầu ngoại tiếp khối bát diện đều
 $R=\frac{x\sqrt{2}}{2}$ $\frac{V_{cau}}{V_{Lap\ phuong}}=\frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{x\sqrt{2}}{2})^3}{x^3}=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$	 $r=\frac{x}{2}$ $\frac{V_{cau}}{V_{Lap\ phuong}}=\frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{x}{2})^3}{x^3}=\frac{\pi}{6}$	 $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$	 Dường cao chóp= $SH=R_{cau}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$ $\frac{V_{cau}}{V_{batdien}}=\frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{x\sqrt{2}}{2})^3}{2.\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{2}}{2}.x^2}=\pi$

Cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh x



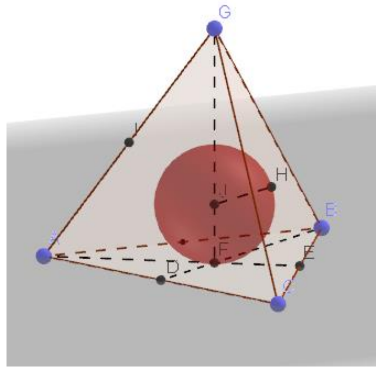
$$R = x\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$V_{Cau-ngoai} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x\sqrt{6}}{4}\right)^3$$

Nếu cạnh tứ diện tăng(Giam) lên n lần thì thể tích cầu ngoại tiếp tăng (giảm) n^3 lần.

$$\frac{V_{Cau\ \text{ngoai}}}{V_{Tu\ \text{dien deu}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x\sqrt{6}}{4}\right)^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}x^3} = \frac{\pi\sqrt{27}}{2}$$

Cầu nội tiếp tứ diện đều cạnh x

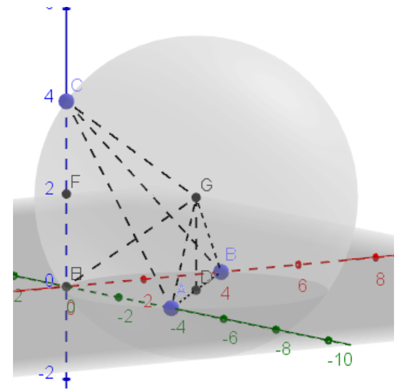


$$r = IH = x\frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{V_{Cau\ \text{noi}}}{V_{Tu\ \text{dien deu}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x\sqrt{6}}{12}\right)^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}x^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

$$V_{Cau\ \text{ngoai}} = 27V_{cau\ \text{noi}}$$

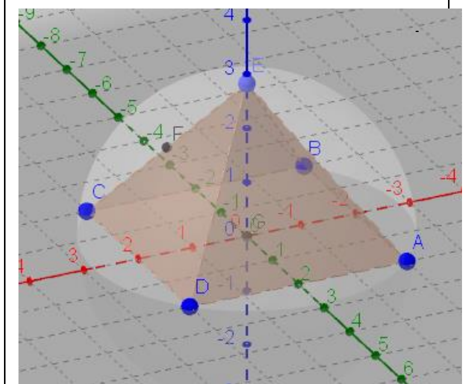
Cầu ngoại tiếp tứ diện vuông



S.ABC có SA=C,AB=a,AC=b vuông góc nhau từng đôi một

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$$

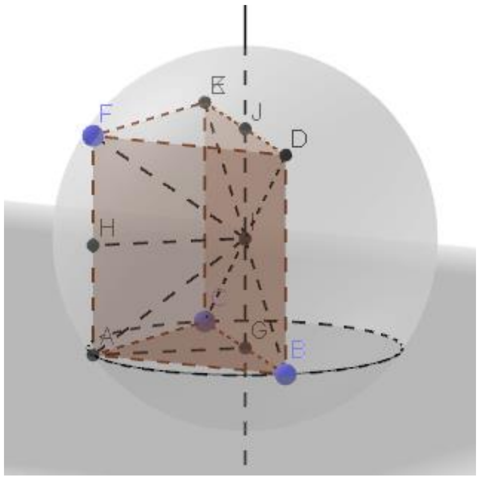
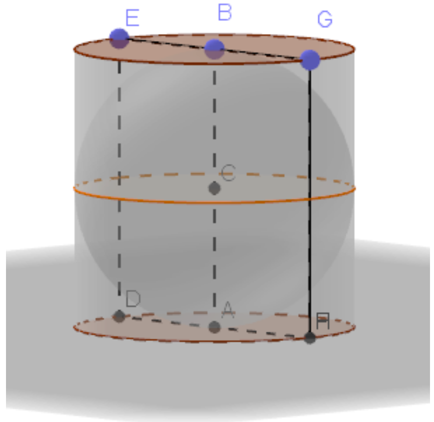
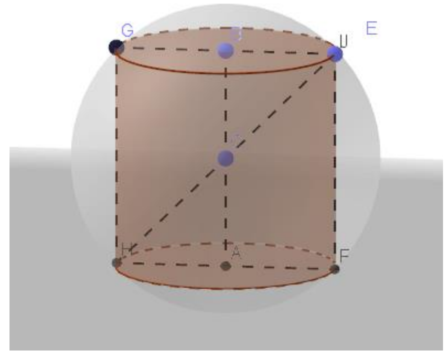
Cầu **ngoại tiếp** chóp đều,đáy tứ giác



Dường cao chóp=

$$SH = R_{cau} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{V_{cau}}{V_{Chop}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{2}}{2}.x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Cầu ngoại tiếp lăng trụ **đứng** có đáy là tam giác vuông.	Cầu trong trụ	Trụ trong cầu	
 Đường cao là c,2 cạnh góc vuông ở đáy là a,b $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$	 $\dfrac{V_{Cau}}{V_{Tru}}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2r.\pi r^2}=\dfrac{2}{3}$		

PHẦN VII. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

A. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

1. Trong không gian cho ba trục *Ox, Oy, Oz* phân biệt và vuông góc từng đôi một.
Gốc tọa độ *O*, trục hoành *Ox*, trục tung *Oy*, trục cao *Oz*, các mặt tọa độ *Oxy, Oyz,Ozx*.
$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vecto đơn vị

$$\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$$

Chú ý: $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$

$$\vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0$$

2. Tọa độ véc tơ: $\vec{u}=(x;y;z)\Leftrightarrow\vec{u}(x;y;z)\Leftrightarrow\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

3. Tọa độ điểm: $M(x;y;z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

4. Các công thức tọa độ cần nhớ: Cho $\vec{u}=(a;b;c)$, $\vec{v}=(a';b';c')$

a) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\b=b'\\c=c'\end{cases}$

b) $\vec{u}\mp\vec{v}=\left(a\pm a';b\pm b';c\pm c'\right)$

c) $k\vec{u}=(ka;kb;kc)$

d) $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos(\vec{u},\vec{v})=aa'+bb'+cc'$

e) $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{aa'+bb'+cc'}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

f) $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

g) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

h) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

i) $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

5. Chú ý: góc của 2 véc tơ $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ là góc hình học (nhỏ) giữa 2 tia mang vectơ có giá trị trong đoạn $\left[0;\pi\right]$. $\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\vec{u},\vec{v}\right)}\geq 0$

6. <u>Chia tỉ lệ đoạn thẳng</u>: M chia AB theo tỉ số k nghĩa là $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$

Công thức tọa độ của M là : $\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k}\\y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k}\\z_M=\dfrac{z_A-kz_B}{1-k}\end{cases}$

M là trung điểm AB: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases}$

7. <u>G là trọng tâm tam giác ABC:</u>

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{cases}$$

8. <u>G là trọng tâm tứ diện ABCD:</u>

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} \\ z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4} \end{cases}$$

9. <u>Tích có hướng 2 véc tơ:</u> Cho 2 véc tơ $\vec{u}=(a;b;c)$ và $\vec{v}=(a';b';c')$ ta định nghĩa tích có hướng của 2 véc tơ đó là một véc tơ, kí hiệu $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ hay $\vec{u}\wedge\vec{v}$ có toạ độ:

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)=\left(bc'-b'c;ca'-ac';ab'-ba'\right)$$

10. <u>Tính chất tích có hướng 2 véc tơ:</u>

a. $\boxed{\left[\vec{u},\vec{v}\right] \text{ vuông góc với } \vec{u} \text{ và } \vec{v}}$

b. $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\sin(\vec{u},\vec{v})$

c. $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng phương

11. <u>Ứng dụng tích có hướng 2 véc tơ:</u>

a. <u>Diện tích hình bình hành ABCD</u>: $S=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$

b. <u>Diện tích tam giác ABC:</u> $S=\dfrac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

c. Ba véc tơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ <u>đồng phẳng:</u> $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0$

d. <u>Thể tích khối hộp</u> có đáy hình bình hành $ABCD$ và cạnh bên AA': $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

e. <u>Thể tích khối tứ diện S.ABC:</u> $V=\dfrac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{SA}\right|$

VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về toạ độ của vecto và của điểm

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích.

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

– Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.

– Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:

- A, B, C *thẳng hàng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *cùng phương*

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$

- $ABCD$ *là hình bình hành* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- *Cho* ΔABC *có các chân* E, F *của các đường phân giác trong và ngoài của góc* A *của* ΔABC *trên* BC.

Ta có: $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\quad \overrightarrow{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

- A, B, C, D *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *không đồng phẳng*

$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S), *ta cần xác định tâm* I *và bán kính* R *của mặt cầu.*

Dạng 1: (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và bán kính R:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và đi qua điểm A:

Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

–Tâm I *là trung điểm của đoạn thẳng* AB:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

– Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D *(mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* $ABCD$*):*

– Giả sử phương trình mặt cầu (S) *có dạng:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\ (*).$$

– *Thay lần lượt toạ độ của các điểm* $A,\ B,\ C,\ D$ *vào* $(*)$, *ta được 4 phương trình.*

– *Giải hệ phương trình đó, ta tìm được* $a,\ b,\ c,\ d \Rightarrow$ *Phương trình mặt cầu* (S).

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm $A,\ B,\ C$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước: *Giải tương tự như dạng 4.*

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

– *Xác định tâm* J *và bán kính* R' *của mặt cầu* (T).

– *Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính* R *của mặt cầu* (S).

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu (S):

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

thì (S) *có* tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu mặt cầu

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1,\ R_1)$ *và* $S_2(I_2,\ R_2)$.

- $I_1I_2<|R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *trong nhau*
- $I_1I_2>R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *ngoài nhau*
- $I_1I_2=|R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *tiếp xúc trong*
- $I_1I_2=R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *tiếp xúc ngoài*
- $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *cắt nhau theo một đường tròn.*

VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm là mặt cầu – Tập hợp tâm mặt cầu

1. ***Tập hợp điểm là mặt cầu***

Giả sử tìm tập hợp điểm M *thoả tính chất* (P) *nào đó.*

– *Tìm hệ thức giữa các toạ độ* $x,\ y,\ z$ *của điểm* M.

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

hoặc: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

– *Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).*

2. ***Tìm tập hợp tâm mặt cầu***

– *Tìm toạ độ của tâm* I, *chẳng hạn:* $\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}\ (*)$

– *Khử t trong* $(*)$ *ta có phương trình tập hợp điểm.*

– *Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).*

MẶT PHẲNG

1. $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc mp(P) được gọi là véc tơ pháp tuyến của (P).
2. Nếu $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}$ $\quad (k \neq 0)$ cũng là véc tơ pháp tuyến của (P).
3. **<u>Phương trình tổng quát của mp(P):</u>** qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B;C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

4. **<u>Khai triển của phương trình tổng quát:</u>**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(A,B,C không đồng thời bằng 0)

5. **<u>Những trường hợp riêng của phương trình tổng quát:</u>**

- (P) qua gốc tọa độ ⇔ D=0
- (P) song song hoặc trùng *(Oxy)* ⇔ *A=B=0*
- (P) song song hoặc trùng *(Oyz)* ⇔ *B=C=0*
- (P) song song hoặc trùng *(Ozx)* ⇔ *A=C=0*
- (P) song song hoặc chứa *Ox* ⇔ *A=0*
- (P) song song hoặc chứa *Oy* ⇔ *B=0*
- (P) song song hoặc chứa Oz ⇔ *C=0*
- (P) cắt Ox tại *A(a;0;0)*, cắt Oy tại *B(0;b;0)* và cắt *Oz* tại *C(0;0;c)*

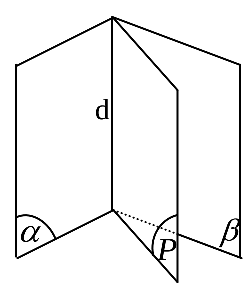
⇔ (P) có phương trình $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

6. **<u>Khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng:</u>**

Cho $M(x_0;y_0;z_0)$ và $(P): Ax + By + Cz + D = 0$; $d(M,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

8. Chùm mặt phẳng

- Tập hợp tất cả cc mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng



- Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng

$(P): m.(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n.(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad m^2 + n^2 \neq 0$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

VẤN ĐỀ 1: Viết phương trình mặt phẳng

Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một điểm thuộc (α) và một VTPT của nó.

Dạng 1: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$:

$$(\alpha): \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dạng 2: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có cặp VTCP $\vec{a}, \vec{b}$:

Khi đó một VTPT của (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Dạng 3: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng

$(\beta): Ax+By+Cz+D=0$:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Dạng 4: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A,B,C

Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) *là:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

Dạng 5: (α) đi qua một điểm $\mathbf{M}$ và một đường thẳng (d) không chứa $\mathbf{M}$:

– *Trên* (d) *lấy điểm* A *và VTCP* $\vec{u}$.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

Dạng 6: (α) đi qua một điểm $\mathbf{M}$, vuông góc với đường thẳng (d):

VTCP $\vec{u}$ *của đường thẳng* (d) *là một VTPT của* (α).

Dạng 7: (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau $d_1,\ d_2$:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng* $d_1,\ d_2$..

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– *Lấy một điểm* $\mathbf{M}$ *thuộc* d_1 *hoặc* $d_2 \Rightarrow M\in(\alpha)$.

Dạng 8: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng $\mathbf{d_2}$($d_1,\ d_2$ *chéo nhau*) :

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng* $d_1,\ d_2$.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– *Lấy một điểm* $\mathbf{M}$ *thuộc* $d_1 \Rightarrow M\in(\alpha)$.

Dạng 9: (α) đi qua điểm $\mathbf{M}$ và song song với hai đường thẳng chéo nhau $\mathbf{d_1},\ \mathbf{d_2}$:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng* $d_1,\ d_2$.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Dạng 10: (α) đi qua một đường thẳng $(\mathbf{d})$ và vuông góc với một mặt phẳng (β):

– *Xác định VTCP* $\vec{u}$ *của* $(\mathbf{d})$ *và VTPT* $\vec{n}_\beta$ *của* (β).

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{n}_\beta\right]$.

– *Lấy một điểm* $\mathbf{M}$ *thuộc* $d \Rightarrow M\in(\alpha)$.

Dạng 11: (α) đi qua điểm $\mathbf{M}$ và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau $(\beta),\ (\gamma)$:

– *Xác định các VTPT* $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ *của* (β) *và* (γ).

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n}=\left[\vec{u}_\beta,\vec{n}_\gamma\right]$.

Dạng 12: (α) đi qua đường thẳng $(\mathbf{d})$ cho trước và cách điểm $\mathbf{M}$ cho trước một khoảng k cho trước:

– *Giả sử* (α) *có phương trình:* $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

– *Lấy 2 điểm* $A,\ B\in(d)\Rightarrow A,\ B\in(\alpha)$ (*ta được hai phương trình* $(1),\ (2)$).

– *Từ điều kiện khoảng cách* $d(M,(\alpha)) = k$, *ta được phương trình* (3).

– *Giải hệ phương trình* (1), (2), (3) *(bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).*

Dạng 13: (α) là tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H :

– *Giả sử mặt cầu* (S) *có tâm* I *và bán kính* R.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(P'): A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Khi đó: (P) cắt (P') $\Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$.

$(P) \,//\, (P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$.

$(P) \equiv (P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$.

$(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(P')} = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

VẤN ĐỀ 3: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.
Hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng .
Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

• *Khoảng cách từ điểm* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *đến mặt phẳng* (α): $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

• *Điểm* H *là hình chiếu của điểm* M *trên* $(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cung phuong} \\ H \in (P) \end{cases}$

• *Điểm* M' *đối xứng với điểm* M *qua* $(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

VẤN ĐỀ 4: Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α), (β) *có phương trình:*

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Góc giữa (α), (β) *bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT* $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos((\alpha),(\beta)) = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Chú ý: $0^0 \leq ((\alpha),(\beta)) \leq 90^0$; $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.
Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ *và mặt cầu* $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

- (α) *và* (S) *không có điểm chung* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) > R$
- (α) *tiếp xúc với* (S) $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) = R$ (α) *là tiếp diện*

Để tìm toạ độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:

– *Viết phương trình đường thẳng* d *đi qua tâm* I *của* (S) *và vuông góc với* (α).

– *Tìm toạ độ giao điểm* H *của* d *và* (α). H *là tiếp điểm của* (S) *với* (α).

- (α) *cắt* (S) *theo một đường tròn* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) < R$

Để xác định tâm H *và bán kính* r *của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:*

– *Viết phương trình đường thẳng* d *đi qua tâm* I *của* (S) *và vuông góc với* (α).

– *Tìm toạ độ giao điểm* H *của* d *và* (α).

H *là tâm của đường tròn giao tuyến của* (S) *với* (α).

Bán kính r *của đường tròn giao tuyến:* $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$

ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương trình của đường thẳng:

1) Vect chỉ phương của đường thẳng:

Định nghĩa: Cho đường thẳng d. Nếu vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường phẳng d thì vect $\vec{a}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường phẳng d. Kí hiệu: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

☞ **Chú ý:**

1) $\vec{a}$ là VTCP của d thì $k.\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của d

2) Nếu d đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của d

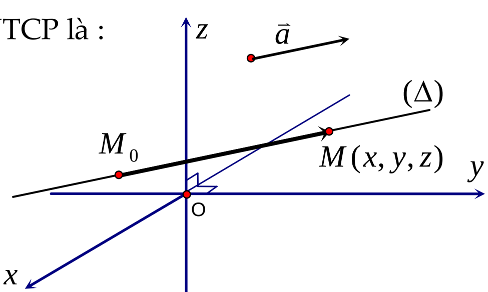
3) Trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{i} = (1;0;0)$

4) Trục Oy có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{j} = (0;1;0)$

5) Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{k} = (0;0;1)$

2.Phương trình tham số của đường thẳng:

Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là :



$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

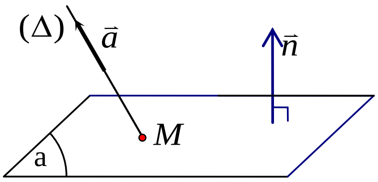
Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ làm VTCP là :

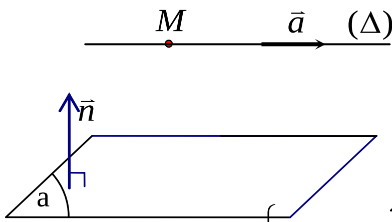
$$(\Delta):\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

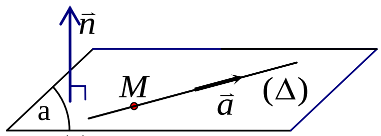
II. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

1.Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

PP HÌNH HỌC







Định lý: Trong $Kg\left(Oxyz\right)$ cho: đường thẳng $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+a_1t & (1)\\ y=y_0+a_2t & (2)\\ z=z_0+a_3t & (3)\end{cases}$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

Khi đó :

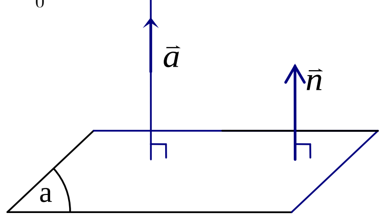
$(\Delta)\ cat\ (\alpha)\quad\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}\neq 0\quad\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$

$(\Delta)\ //\ (\alpha)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\ M_0\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa_1+Ba_2+Ca_3=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}$

$(\Delta)\ \subset\ (\alpha)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\ M_0\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa_1+Ba_2+Ca_3=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$

Đặc biệt: $(\Delta)\ \perp\ (\alpha)\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

$\Leftrightarrow\quad a_1:a_2:a_3=A:B:C$



<u>PP ĐẠI SỐ:</u> Muốn tìm giao điểm M của $\left(\Delta\right)$ và $\left(\alpha\right)$ ta giải hệ phương trình: $\begin{cases}pt(\Delta)\\ pt(\alpha)\end{cases}$ tìm $x,y,z.$

Suy ra: $M\left(x,y,z\right)$

Thế $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)$ vào phương trình $mp\left(P\right)$ và rút gọn dưa về dạng: $at+b=0\ (*)$

- d cắt $mp\left(P\right)$ tại một điểm $\Leftrightarrow Pt\ \left(*\right)$ có một nghiệm t.
- d song song với $\left(P\right)\Leftrightarrow Pt\ \left(*\right)$ vô nghiệm.
- d nằm trong $\left(P\right)\Leftrightarrow Pt\ \left(*\right)$ có vô số nghiệm t.
- d vuông góc $\left(P\right)\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

PP HÌNH HỌC

Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng: Δ_1 đi qua M và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$.

Δ_2 đi qua N và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

+ $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] = \vec{0}$.

+ $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$.

+ Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$.

+ Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN} \neq 0$.

<u>PP ĐẠI SỐ:</u> Muốn tìm giao điểm M của (Δ_1) va (Δ_2) ta giải hệ phương trình : $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$ tìm x, y, z. Suy ra: $M\left(x, y, z\right)$

3) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu:

Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \ (1) \\ y = y_0 + a_2 t \ (2) \\ z = z_0 + a_3 t \ (3) \end{cases}$ và mặt cầu $\left(S\right): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

<u>PP HÌNH HỌC</u>

B1. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu $\left(S\right)$ đến đường thẳng d là $h = d(I, d) = \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{IM_0}.\vec{a}\right]\right\|}{\left|\vec{a}\right|}$

B2. So sánh $d(I, d)$ với bán kính R của mặt cầu:

- Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt $\left(S\right)$
- Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc $\left(S\right)$
- Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt $\left(S\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,\ N$ và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu

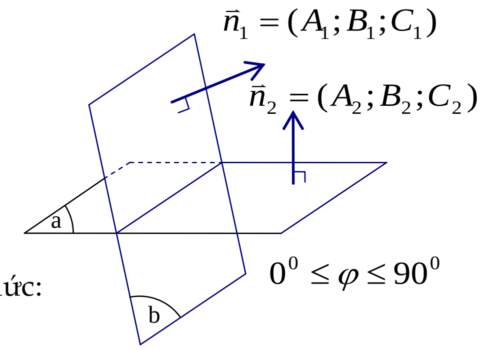
<u>PP ĐẠI SỐ:</u> Thế $\left(1\right),\ \left(2\right),\ \left(3\right)$ vào phương trình $\left(S\right)$ và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t $\left(*\right)$

- Nếu phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm thì d khong cắt $\left(S\right)$
- Nếu phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm thì d tiếp xc $\left(S\right)$
- Nếu phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm thì d cắt $\left(S\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,\ N$

Chú ý: Để tìm tọa độ $M,\ N$ ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d

III. Góc trong không gian:

1. Góc giữa hai mặt phẳng:



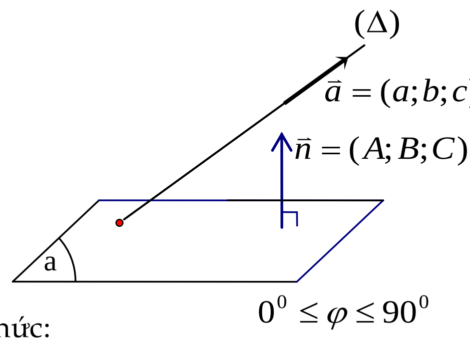
Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình :

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) & (β) ta có công thức:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:



Cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

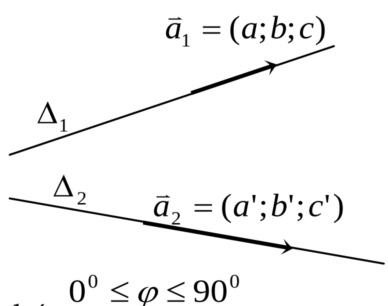
và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) & (α) ta có công thức:

$$\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.Góc giữa hai đường thẳng :

Cho hai đường thẳng :



$$(\Delta_1): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$(\Delta_2): \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'}$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ_1) & (Δ_2) ta có công thức:

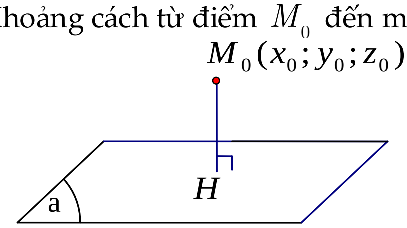
$$\cos\varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

IV. Khoảng cách:

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$

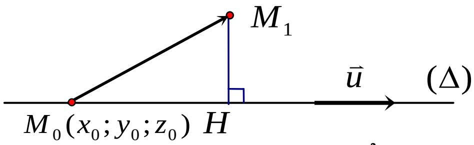
Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính bởi :



$$d(M_0; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M₁ đến (Δ) được tính bởi công thức:



$$d(M_1,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

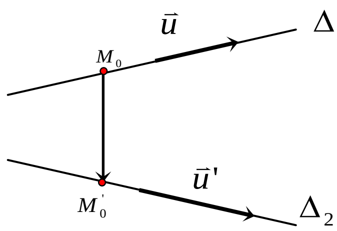
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai đường thẳng chéo nhau :

$$(\Delta_1)\ co\ VTCP\ \vec{u}=(a;b;c)\ va\ qua\ M_0(x_0;y_0;z_0)$$

$$(\Delta_2)\ co\ VTCP\ \vec{u'}=(a';b';c')\ va\ qua\ M_0'(x_0';y_0';z_0')$$

Khi đó khoảng cách giữa (Δ_1) va (Δ_2) được tính bởi công thức $d(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u};\vec{u}'\right]\right|}$



CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

VẤN ĐỀ 1: Lập phương trình đường thẳng

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định một điểm thuộc d và một VTCP của nó.

Dạng 1: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$(d):\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_o+a_3t \end{cases}\qquad (t\in R)$$

Dạng 2: d đi qua hai điểm A, B: *Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.*

Dạng 3: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: *Vì $d//\Delta$ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.*

Dạng 4: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: *Vì $d\perp(P)$ nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.*

Dạng 5: d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\mathbf{P})$, $(\mathbf{Q})$:

• *Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.*

– *Tìm toạ độ một điểm $A\in d$: bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ (với việc chọn giá trị cho một ẩn)*

– *Tìm một VTCP của d: $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$*

• *Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.*

Dạng 6: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2 :

Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ nên một VTCP của d là: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$

Dạng 7: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

• *Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ.*

$$\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.

• *Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$*

Dạng 8: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

• *Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.*

• *Cách 2: Gọi $(P) = (M_0, d_1)$, $(Q) = (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. Do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$.*

Dạng 9: d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 : *Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.*

Dạng 10: d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 :

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 11: d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• *Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N. Khi đó, d là đường thẳng MN.*

• *Cách 2:*

– *Vì $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.*

– *Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:*

+ *Lấy một điểm A trên d_1.*

+ *Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.*

– *Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2.*

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 12: d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng $(\mathbf{P})$:

• *Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:*

– *Lấy $M \in \Delta$.*

– *Vì (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.*

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 13: d đi qua điểm **M**, vuông góc với d_1 và cắt d_2 :

• *Cách 1: Gọi* N *là giao điểm của d và* d_2. *Từ điều kiện* $MN \perp d_1$, *ta tìm được* N. *Khi đó, d là đường thẳng* MN.

• *Cách 2:*

– Viết phương trình mặt phẳng (P) *qua* M *và vuông góc với* d_1.

– Viết phương trình mặt phẳng (Q) *chứa* M *và* d_2.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét VTTĐ giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

• *Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa các VTCP và các điểm thuộc các đường thẳng.*

• *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.*

VẤN ĐỀ 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

• *Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng.*

• *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.*

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt cầu ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

• *Phương pháp hình học: Dựa vào khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng và bán kính.*

• *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt cầu.*

VẤN ĐỀ 5: Khoảng cách

1. ***Khoảng cách từ điểm*** M ***đến đường thẳng*** d

• *Cách 1: Cho đường thẳng d đi qua* M_0 *và có VTCP* $\vec{a}$.

$$d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$$

• *Cách 2: – Tìm hình chiếu vuông góc* H *của* M *trên đường thẳng* d.

– $d(M,d) = MH$.

• *Cách 3: – Gọi* $N(x;\ y;\ z) \in d$. *Tính* MN^2 *theo* t (t *tham số trong phương trình đường thẳng* d).

– Tìm t *để* MN^2 *nhỏ nhất.*

– Khi đó $N \equiv H$. *Do đó* $d(M,d) = MH$.

2. ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau***

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 *và* d_2. *Biết* d_1 *đi qua điểm M1 và có VTCP* $\vec{a}_1$, d_2 *đi qua điểm* M_2

và có VTCP $\vec{a}_2$ $$d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 *bằng khoảng cách giữa* d_1 *với mặt phẳng* (α) *chứa* d_2 *và song song với* d_1.

3. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song*

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

4. *Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song*

Khoảng cách giữa đường thẳng d *với mặt phẳng* (α) *song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm* M *bất kì trên* d *đến mặt phẳng* (α).

VẤN ĐỀ 6: Góc

1. *Góc giữa hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 *lần lượt có các VTCP* $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 *bằng hoặc bù với góc giữa* $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

$$\cos\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)=\frac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$$

2. *Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng*

Cho đường thẳng d *có VTCP* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ *và mặt phẳng* (α) *có VTPT* $\vec{n}=(A;B;C)$.*Góc giữa đường thẳng* d *và mặt phẳng* (α) *bằng góc giữa đường thẳng* d *với hình chiếu* d' *của nó trên* (α).

$$\sin\left(d,(\alpha)\right)=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

MẶT CẦU

I. Phương trình mặt cầu:

1. Phương trình chính tắc:

Phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R

là: $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (1)

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu

Đặc biệt: Khi $I\equiv O$ thì $(C):x^2+y^2+z^2=R^2$

2. Phương trình tổng quát:

Phương trình : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

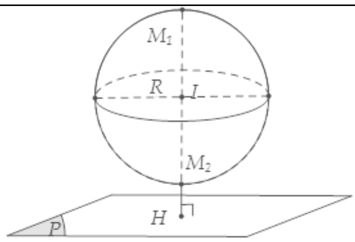
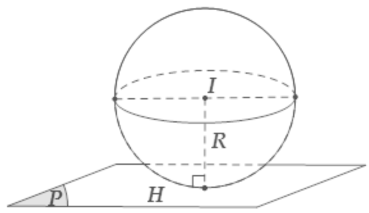
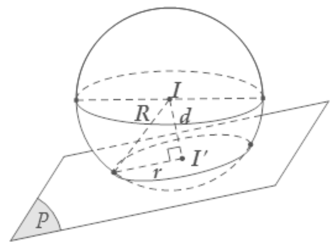
II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình :

$$(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$$
$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Gọi $d(I;\alpha)$ là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng α

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH = d(I,(P))$.

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

Dạng 1: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R: $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm A:

Phương pháp: Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

Phương pháp:

- Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng
$$AB:\ x_I = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$
- Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện)

Phương pháp:

- Giả sử (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\ (*)$.
- Thay lần lượt toạ độ của các điểm A, B, C, D vào $(*)$, ta được 4 phương trình.
- Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a, b, c, d \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S).

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Phương pháp: Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

Phương pháp:

- Xác định tâm I và bán kính R' của mặt cầu (T).
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R

của mặt cầu (S). (Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì (S) có tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1, R_1)$ và $S_2(I_2, R_2)$.

- $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ trong nhau
- $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ ngoài nhau
- $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong
- $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc ngoài
- $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn

Dạng 7: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước.

Phương pháp: Bán kính mặt cầu $R = d(I;(P))$

Dạng 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện .

a. Đường tròn có diện tích cho trước.
b. Đường tròn có chu vi cho trước.
c. Đường tròn có bán kính cho trước.

Phương pháp:

- Từ công thức diện tích đường tròn $S = \pi r^2$ hoặc chu vi đường tròn $P = 2\pi r$ ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến r.
- Tính $d = d(I,(P))$
- Tính bán kính mặt cầu $R = \sqrt{d^2 + r^2}$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện.

Phương pháp:

- Ta có bán kính mặt cầu $R = d(I;(P))$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 10: Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ cho trước và có tâm $I(a;b;c)$ cho trước.

Phương pháp

Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) ta có $R = d(I,\Delta)$.

Dạng 11: Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ tại tiếp điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ thuộc Δ và có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước.

Phương pháp

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ.
- Toạ độ tâm $I = (P) \cap \Delta$ là nghiệm của phương trình.

- Bán kính mặt cầu $R = IM = d\left(I,\Delta\right)$.
- Kết luận về phương trình mặt cầu $\left(S\right)$

Dạng 12: Viết phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(a;b;c\right)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B thoả mãn điều kiện:

a. Độ dài AB là một hằng số.
b. Tam giác IAB là tam giác vuông.
c. Tam giác IAB là tam giác đều.

Phương pháp

Xác định $d\left(I,\Delta\right) = IH$, vì ΔIAB cân tại I nên $HB = \dfrac{AB}{2}$

a. Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{IH^2 + HB^2}$

b. Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{IH}{\sin 45^o}$

c. Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{IH}{\sin 60^o}$

MỘT SỐ DẠNG GIẢI NHANH CỰC TRỊ KHÔNG GIAN

Cho $\left(P\right)$ và hai điểm *A, B*. Tìm $M \in \left(P\right)$ để $\left(MA + MB\right)_{\min}$?	+ Nếu A và B trái phía so với $\left(P\right)$ $\Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap \left(P\right)$ + Nếu A và B cùng phía so với $\left(P\right)$ Tìm B' là đối xứng của B qua $\left(P\right)$ $\Rightarrow M, A, B'$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB' \cap \left(P\right)$
Cho $\left(P\right)$ và hai điểm *A, B*. Tìm $M \in \left(P\right)$ để $\left\|MA - MB\right\|_{\max}$?	+ Nếu A và B cùng phía so với $\left(P\right)$ $\Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap \left(P\right)$ + Nếu A và B trái phía so với $\left(P\right)$ Tìm B' là đối xứng của B qua $\left(P\right)$ $\Rightarrow \left\|MA - MB'\right\| = AB'$
Cho điểm $M\left(x_M; y_M; z_M\right)$ không thuộc các trục và mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình $\left(P\right)$ qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{O.ABC}$ nhỏ nhất?	$\left(P\right): \dfrac{x}{3x_M} + \dfrac{y}{3y_M} + \dfrac{z}{3z_M} = 1$
Viết phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ chứa đường thẳng d, sao cho khoảng cách từ điểm $M \notin d$ đến $\left(P\right)$ là lớn nhất?	$\left(P\right): \begin{cases} Qua\ A \in d \\ \overrightarrow{n}_{(P)} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{u_d}\right] \end{cases}$
Viết phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ qua A và cách M một khảng lớn nhất	$\left(P\right): \begin{cases} Qua\ A \\ \overrightarrow{n}_{(P)} = \overrightarrow{AM} \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, sao cho (P) tạo với Δ (Δ không song song với d) một góc lớn nhất là lớn nhất ?	$(P):\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{n}_{(P)} = \left[\left[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta\right]\vec{u}_d\right] \end{cases}$
Cho $\Delta // (P)$. Viết phương trình đường thẳng d song song với Δ và cách Δ một khoảng nhỏ nhất ?	Lấy $A \in \Delta$ gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P) $d:\begin{cases} Qua\, A' \\ \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là lớn nhất (AM không vuông góc với (P)) ?	$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right] \end{cases}$
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)) ?	$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{n}_{(P)}\right] \end{cases}$
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A \in (P)$ cho trước, sao cho d nằm trong (P) và tạo với đường thẳng Δ một góc nhỏ nhất với Δ cắt nhưng không vuông góc với (P)?	$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{n}_{(P)}\right] \end{cases}$

CASIO $Oxyz$ - KỸ THUẬT VIP XỬ NHANH GỌN BẰNG "MODE 8 KẾT HỢP VỚI CALC ĐƠN VỊ" TRONG ĐƯỜNG THẲNG - MẶT PHẲNG - MẶT CẦU

Lê Master[1]*

Tóm tắt nội dung
Bài viết cung cấp một số thủ thuật giải nhanh các bài toán liên quan đến đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu trong không gian $Oxyz$. Vì thời gian có hạn, tác giả chỉ trình bày một phần nhỏ của chuyên đề, quý độc giả có thể xem trên wall facebook của nhóm hoặc kênh youtube [1] để biết thêm chi tiết.

Keywords
Máy tính cầm tay — $Oxyz$ — đường thẳng — mặt phẳng — mặt cầu.

[1] *Nhóm Công Thức Giải Nhanh Toán và Thủ Thuật Casio.*
*LaTeX hóa bởi Dương Trác Việt.

Mục lục

Quy ước

1. Dấu $\boxed{\times}$ hoặc để trống: tích có hướng $[\ldots,\ldots]$;
2. Dấu $\bullet$: tích vô hướng (lệnh $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$);
3. Dấu $\boxed{\text{Abs}}$: độ dài vector hoặc trị tuyệt đối $|\ldots|$ (lệnh $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{hyp}}$);
4. Dấu $\rightarrow V$ơ : gán vector vào Vc (còn nếu không nói gì thì các bạn hiểu những thành phần trong phép tính vector được gán tương ứng).

Có ba loại $\boxed{\text{CALC}}$ thường dùng, đó là 100, 1000 và $1/100$. Bài viết này được minh họa với $\boxed{\text{CALC}}$ 100.

1. Bài toán về đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vector chỉ phương (VTCP) $\vec{u}=(a;b;c)$ thì có *phương trình tham số* là

$$\Delta\colon \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases}$$

hay nói cách khác, nó được viết dưới "dạng tọa độ" $\Delta\colon (x;y;z) = (x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Đưa về gọn hơn, ta có $\Delta\colon (x;y;z) = (x_0;y_0,z_0) + t(a;b;c) = A + t\vec{u}$.

Vậy, $\boxed{\Delta\colon (x;y;z) = A + t\vec{u}}$.

1.1 Hình chiếu của điểm lên đường

Tìm tọa độ B' là hình chiếu của $B(x_1;y_1;z_1)$ lên Δ?

1.1.1 Cách 1

Ta có $B' \in \Delta \Rightarrow B' = A + t\vec{u}$. Ta tìm t.

Vì B' là hình chiếu của B lên Δ nên $\overrightarrow{BB'} \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (B' - B) \bullet \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow (A + t\vec{u} - B) \bullet \vec{u} = 0 \Rightarrow t.$$

Cách bấm máy:

1. Gán $A \to VctA$, $\vec{u} \to VctB$, $B \to VctC$;
2. Bấm $\boxed{(VctA + VctB \times 100 - VctC) \bullet VctB}$ = kết quả 1;
3. Kết quả 1 $\overset{\text{đọc về}}{\to}$ $a_1 t + b_1 = 0 \to t = t_1 = -\dfrac{b_1}{a_1}$;
4. Vậy $B' = A + t_1\vec{u}$,
   hay $\boxed{B' = VctA + VctB \times -b_1 \div a_1}$.

1.1.2 Cách 2

Ta có $B' \in \Delta \Rightarrow B' = A + t\vec{u}$.

Vì B' là hình chiếu của B lên Δ nên $BB' = d(B,\Delta) = \min\limits_{B_0 \in \Delta} BB_0$. Ngoài ra, do $d(B,\Delta) \geq 0$ nên $d(B,\Delta)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d^2(B,\Delta)$ nhỏ nhất. Ta tìm t để $d^2(B,\Delta)$ nhỏ nhất. Ta có

$$d^2(B,\Delta) = \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 = |A + t\vec{u} - B|^2 \Rightarrow t.$$

Cách bấm máy:

1. Gán $A \to VctA$, $\vec{u} \to VctB$, $B \to VctC$;
2. Bấm $\boxed{Abs(VctA + VctB \times 100 - VctC)^2}$ = kết quả 2;
3. Kết quả 2 $\overset{\text{đọc về}}{\to}$ $a_2 t^2 + b_2 t + c_2 = 0$ [1] $\overset{\text{đạo hàm}}{\to}$ $2a_2 t + b_2 = 0 \to t = t_2 = -\dfrac{b_2}{2a_2}$; [2]
4. Vậy $B' = A + t_2\vec{u}$,
   hay $\boxed{B' = VctA + VctB \times -b_2 \div (2a_2)}$.

Chú ý

Đáp án khi giải bằng Cách 1 và Cách 2 là giống nhau

$$\begin{aligned} B' &= VctA + VctB \times -b_1 \div a_1 \\ &= VctA + VctB \times -b_2 \div (2a_2). \end{aligned}$$

1.2 Khoảng cách từ điểm đến đường

Tìm khoảng cách $d(B,\Delta)$ từ $B(x_1;y_1;z_1)$ đến Δ? Vẫn dùng t (t_1 hoặc t_2) ở phần 1.1,

$$\begin{aligned} d(B,\Delta) &= \left|\overrightarrow{BB'}\right| = |A + t\vec{u} - B| \\ &\boxed{= Abs(VctA + VctB \times t - VctC)}. \end{aligned}$$

Nếu máy hiện số vô tỷ, có thể gán kết quả vào X rồi qua MODE 1 bấm √■ ALPHA X x^2 [3].

1.3 Điểm đối xứng qua đường thẳng

Tìm tọa độ điểm đối xứng B'' của $B(x_1;y_1;z_1)$ qua Δ?

Dùng t ở phần 1.1, vì hình chiếu B' của B lên Δ là trung điểm BB'' nên $B' = \dfrac{B + B''}{2}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow B'' = 2B' - B \\ &\boxed{= 2(VctA + VctB \times t) - VctC}. \end{aligned}$$

---

[1] Luôn vô nghiệm vì $d^2(B,\Delta) > 0$ nếu $B \notin \Delta$.

[2] Có thể dùng MODE 5 3 của CASIO 570 VN Plus (hoặc SHIFT 6 6 của VINACAL 570ES Plus II) để được X-value minimum$= -\dfrac{b_2}{2a_2}$ và Y-value minimum$= d^2(B,\Delta)$.

[3] Theo người đánh máy, độc giả nên giải cách 1.1.2 với MODE 5 3 của CASIO 570 VN Plus (hoặc SHIFT 6 6 của VINACAL 570ES Plus II) để được Y-value minimum $= d^2(B,\Delta)$, từ đây lấy căn bậc hai của Y-value minimum ra ngay $d(B,\Delta)$.

2. Bài toán về mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P) có *phương trình tổng quát*

$$(P)\colon ax+by+cz+d=0$$

Dễ thấy vector pháp tuyến (VTPT) của (P) là $\vec{n}=(a;b;c)$. Khi đó, ta có thể viết (P) dưới "dạng tọa độ" $(P)\colon (a;b;c)\bullet(x;y;z)+d=0$, hay rút gọn hơn, $(P)\colon \vec{n}\bullet(x;y;z)+d=0$.

Vậy, $\boxed{(P)\colon \vec{n}\bullet(x;y;z)+d=0}$.

2.1 Hình chiếu của điểm lên mặt

Tìm tọa độ B' là hình chiếu của $B(x_1;y_1;z_1)$ lên (P)?

Vì B' là hình chiếu của B lên (P) nên $BB'\perp(P)$, do đó đường thẳng BB' nhận $\vec{n}$ làm VTCP. Phương trình BB' có dạng $BB'\colon (x;y;z)=B+t\vec{n}$.

Do $B'\in BB'$ nên tọa độ $B'=B+t\vec{n}$, ta tìm t. Ngoài ra, $B'\in(P)$ nên $\vec{n}\bullet B'+d=0$

$$\Leftrightarrow (B+t\vec{n})\bullet\vec{n}+d=0\Rightarrow t.$$

Cách bấm máy:

1. Gán $B\to VctA$, $\vec{n}\to VctB$;
2. Bấm $\boxed{(VctA+VctB\times 100)\bullet VctB+d}$ [=] kết quả;
3. Kết quả $\overset{\text{đọc về}}{\to}$ $at+b=0\to t=-\dfrac{b}{a}$;
4. Vậy $B'=B+t\vec{n}$, hay $\boxed{B'=VctA+VctB\times -b\div a}$.

2.2 Khoảng cách từ điểm đến mặt

Tìm khoảng cách $d(B,(P))$ từ $B(x_1;y_1;z_1)$ đến (P)?

Vẫn dùng t ở phần 2.1,

$$d(B,(P))=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=|t\vec{n}|$$
$$\boxed{=Abs(VctB\times -b\div a)}.$$

Nếu máy hiện số vô tỷ, có thể gán kết quả vào X rồi qua [MODE] [1] bấm [√■] [ALPHA] [X] [x^2].

2.3 Điểm đối xứng qua mặt phẳng

Tìm tọa độ điểm đối xứng B'' của $B(x_1;y_1;z_1)$ qua (P)?

Dùng t ở phần 2.1, vì hình chiếu B' của B lên Δ là trung điểm BB'' nên $B'=\dfrac{B+B''}{2}$

$$\Leftrightarrow B''=2B'-B$$
$$\boxed{=2(VctA+VctB\times -b\div a)-VctA}.$$

3. Bài toán về mặt cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R. Gọi $A(x;y;z)$ là điểm thuộc (S). Khi đó phương trình của (S) có dạng

$$IA^2=R^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{IA}\right|^2=R^2$$
$$\Leftrightarrow |A-I|^2=R^2\Leftrightarrow\boxed{|(x;y;z)-I|^2=R^2}.$$

4. Tương giao giữa đường thẳng với mặt phẳng và mặt cầu

4.1 Tìm giao điểm giữa đường và mặt phẳng

Tìm tọa độ $M=\Delta\cap(P)$ với $\Delta\colon\begin{cases}x=x_0+a_1t,\\ y=y_0+b_1t,\\ z=z_0+c_1t,\end{cases}$ và $(P)\colon a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$?

Dễ thấy Δ đi qua $A(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a_1;b_1;c_1)$; (P) có VTPT $\vec{n}=(a_2;b_2;c_2)$. Ta viết lại phương trình của Δ và (P) ở dạng tọa độ: $\Delta\colon (x;y;z)=A+t\vec{u}$ và $(P)\colon (x;y;z)\bullet\vec{n}+d_2=0$.

Vì $M\in\Delta$ nên $M=A+t\vec{u}$, ta tìm t. Mặt khác, $M\in(P)$ nên $M\bullet\vec{n}+d_2=0$

$$\Leftrightarrow (A+t\vec{u})\bullet\vec{n}+d_2=0\Rightarrow t.$$

Cách bấm máy:

1. Gán $A\to VctA$, $\vec{u}\to VctB$, $\vec{n}\to VctC$;
2. Bấm $\boxed{(VctA+VctB\times 100)\bullet VctC+d_2}$ [=] kết quả;
3. Kết quả $\overset{\text{đọc về}}{\to}$ $at+b=0\to t=-\dfrac{b}{a}$;

4. Vậy $M' = A + t\vec{u}$,
   hay $\boxed{M = VctA + VctB \times -b \div a}$.

4.2 Tìm giao điểm giữa đường và mặt cầu

Tìm tọa độ $M = \Delta \cap (S)$ với $\Delta : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + b_1 t, \\ z = z_0 + c_1 t, \end{cases}$
và $(S): (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = R^2$?

Dễ thấy Δ đi qua $A(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a_1;b_1;c_1)$; (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. Ta viết lại phương trình của Δ và (S) ở dạng tọa độ: Δ: $(x;y;z) = A + t\vec{u}$ và (S): $|(x;y;z) - I|^2 = R^2$.

Vì $M \in \Delta$ nên $M = A + t\vec{u}$, ta tìm t. Mặt khác, $M \in (S)$ nên $|M - I|^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow |A + t\vec{u} - I|^2 - R^2 = 0 \Rightarrow t.$$

Cách bấm máy:

1. Gán $A \to VctA$, $\vec{u} \to VctB$, $I \to VctC$;
2. Bấm $\boxed{Abs\,(VctA + VctB \times 100 - VctC)^2 - R^2}$ ⊟ kết quả;
3. Kết quả $\overset{\text{đọc về}}{\to}$ $at^2 + bt + c = 0$;
4. Dùng MODE 5 (EQN) giải phương trình bậc hai,
   (a) Nếu ra 2 nghiệm $t_1 \neq t_2 \to$ 2 giao điểm $M_{1,2} = A + t_{1,2}\vec{u}$;
   (b) Nếu ra 1 nghiệm $t \to \Delta$ tiếp xúc (S) tại $M = A + t\vec{u}$;
   (c) Nếu ra 2 nghiệm có chữ $i \to$ vô nghiệm $\to$ không có giao điểm.

5. Lưu ý chung

1. Giai đoạn tìm t, độc giả nên nhẩm [4] nhằm tận dụng biểu thức đã nhập trên máy, khỏi phải nhập lại do chuyển MODE.
2. Để kiểm tra tính chính xác của $t = t_0$ vừa tìm được, độc giả quay lại biểu thức vừa nhập, thay 100 bởi t_0 rồi bấm ⊟, nếu máy hiện 0 thì t_0 đó là đúng.

[4] Lấy đạo hàm, hoặc sử dụng công thức hoành độ đỉnh parabol, hay dùng một máy tính cầm tay khác có chức năng xác định X-value minimum để bấm song song.

Tài liệu

[1] Thám tử Lãnh Huyết CASIO-VINACAL (2017), truy cập ngày 19-5-2017 tại *youtube.com/channel/UCjtrGpIhih6N107ZdqG9B5A*

Phụ lục

Chúng tôi tổng hợp một số công thức trong hình học $Oxyz$ và dạng CASIO tương ứng

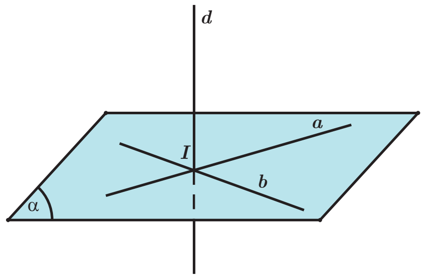
1. Độ dài: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| \to Abs(VctA - VctB)$;
2. Khoảng cách điểm - mặt phẳng:
$$d(M,(P)) = \frac{|M \bullet \vec{n} + d|}{|\vec{n}|}$$
$$\to Abs(VctA \bullet VctB + d) \div Abs(VctB);$$
3. Khoảng cách điểm - đường thẳng:
$$d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$
$$\to Abs(VctA \times VctB) \div Abs(VctB);$$
4. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng:
$$d(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \bullet [\vec{u}_1, \vec{u}_2]\right|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$$
$$\to Abs\,(VctA \bullet (VctB \times VctC)) \div Abs(VctB \times VctC);$$
5. Góc giữa 2 đường thẳng (hoặc 2 mặt phẳng):
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|} \left(= \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right)$$
$$\to Abs(VctA \bullet VctB) \div (Abs(VctA) \times Abs(VctB));$$
6. Góc giữa đường và mặt:
$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}$$
$$\to Abs(VctA \bullet VctB) \div (Abs(VctA) \times Abs(VctB)).$$

H. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp 1

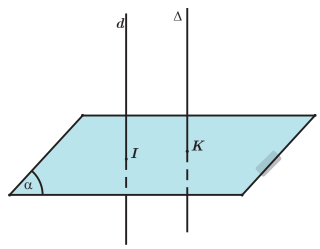
Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) ta chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau nằm trong (α).



$$\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a,b \subset (P) \\ a \cap b = I \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P).$$

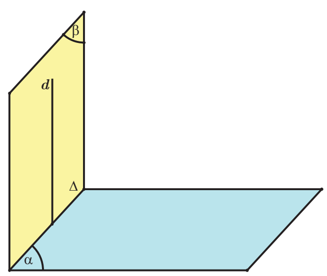
Phương pháp 2

Sử dụng tính chất: $d \parallel \Delta$, mà $\Delta \perp (\alpha)$ thì $d \perp (\alpha)$.



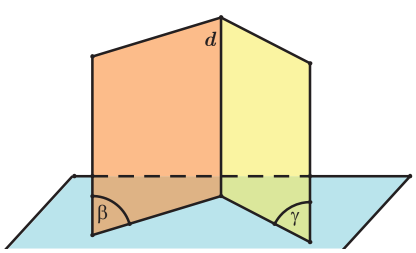
Phương pháp 3

Nếu hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến Δ, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (β) mà vuông góc với giao tuyến Δ thì vuông góc với mặt phẳng (α).



Phương pháp 4

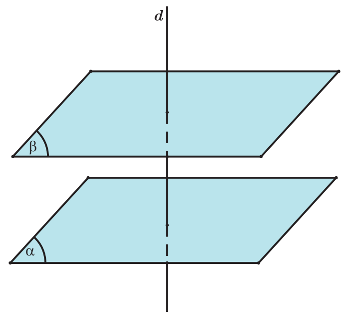
Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



$$\left.\begin{array}{l} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (R).$$

Phương pháp 5

Nếu hai mặt phẳng song song với nhau, đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng này thì nó vuông góc với mặt phẳng kia.

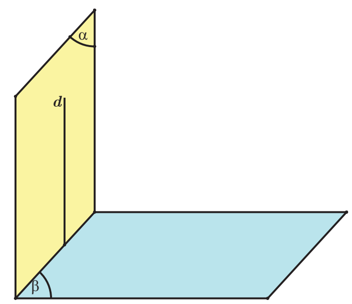


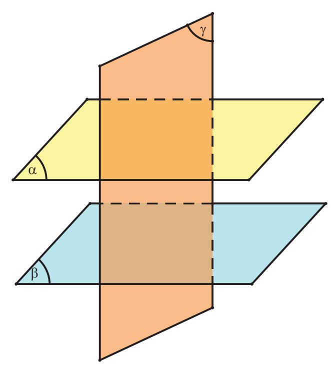
2. Hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp 1

Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.

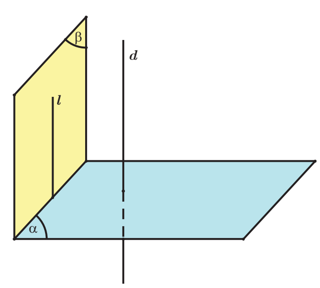
$$\left.\begin{array}{l} d\perp(\beta) \\ d\subset(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$$





Phương pháp 2

Sử dụng tính chất: $\left.\begin{array}{l} (\alpha)\,\|\,(\beta) \\ (\gamma)\perp(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow(\gamma)\perp(\beta)$.



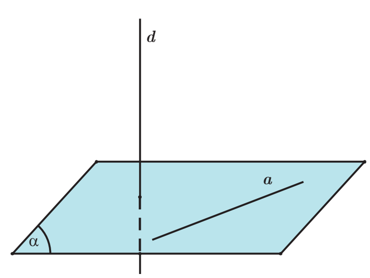
Phương pháp 3

Sử dụng tính chất $(\alpha)\perp d$, mà $d\,\|\,(\beta)$ hoặc $d\subset(\beta)$ thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

3. Hai đường thẳng vuông góc

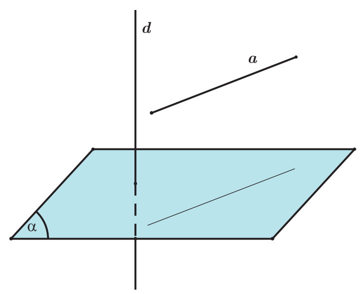
Phương pháp 1

Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau ta chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia. $\left.\begin{array}{l} d\perp(\alpha) \\ a\subset(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow d\perp a$.



Phương pháp 2

Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (α), mà đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (α), thì d vuông góc với đường thẳng a.



$$\left.\begin{array}{l} d\perp(\alpha) \\ a\parallel(\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow d\perp a.$$

4. Góc

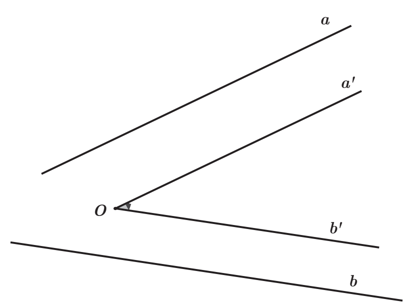
4.1 Góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp

Bước 1: Tìm một điểm O tùy ý (có thể lấy trên đường thẳng a hoặc b). Từ O dựng hai tia Oa' và Ob' lần lượt song song với a và b được góc $\widehat{a'Ob'}=\varphi$.

Bước 2. Tính số đo của góc φ bằng các định lý và tính chất của hình học phẳng hay định lý côsin.

Chú ý: góc giữa hai đường thẳng không lớn hơn 90^0.



4.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

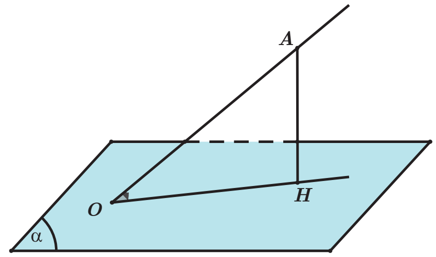
Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta thực hiện như sau:

Bước 1: Xác định hình chiếu vuông góc của d xuống mặt phẳng (α) là d'.

+ Tìm giao điểm $O=d\cap(\alpha)$.

+ Dựng hình chiếu vuông góc của A xuống (α) là H (chọn đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α)).

Bước 2: Góc giữa đường thẳng d và d' là góc đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tính số đo của góc đó bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

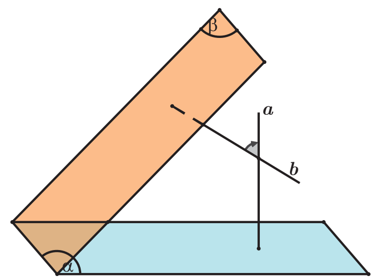


4.3 Góc giữa hai mặt phẳng

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta làm như sau:

Phương pháp 1

Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



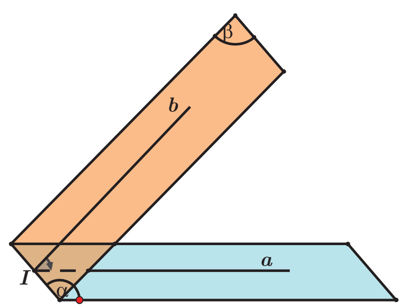
$$\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \widehat{(a,b)}=\widehat{\big((\alpha),(\beta)\big)}.$$

Phương pháp 2

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Lấy điểm $I\in\Delta$.Trong (α) dựng $a\perp\Delta$ tại I. Trong (β) dựng $b\perp\Delta$ tại I.

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



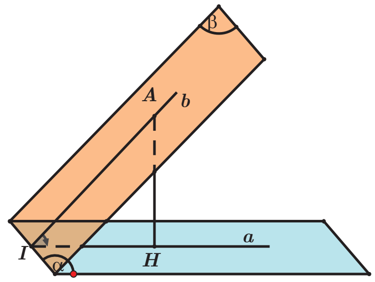
Phương pháp 3

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Trong (β) lấy điểm A. Dựng hình chiếu H của A xuống mặt phẳng (α).

Từ H dựng $HI\perp\Delta$.

Khi đó góc $\widehat{AHI}$ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



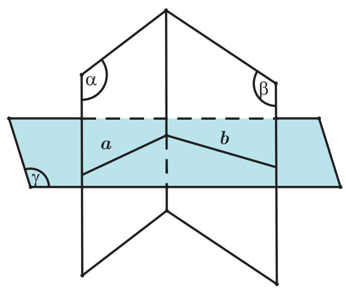
Phương pháp 4

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Chọn mặt phẳng $(\gamma)\perp\Delta$.

Tìm các giao tuyến $a=(\gamma)\cap(\alpha)$, $b=(\gamma)\cap(\beta)$.

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



Phương pháp 5 Sử dụng công thức diện tích hình chiếu $S'=S\cos\varphi$.

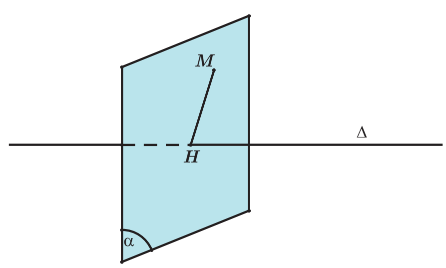
5. Khoảng cách

5.1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

- Trong mặt phẳng (M,Δ) vẽ $MH\perp\Delta$. Khi đó: $d(M,\Delta)=MH$.

- Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại H. Khi đó: $d(M,\Delta)=MH$.



5.2 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

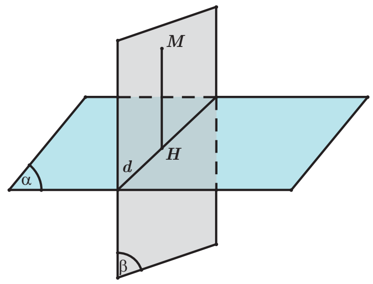
Cho điểm M và mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu của M xuống (α). Khi đó MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

Phương pháp 1

Bước 1: Chọn mặt phẳng (β) qua M và vuông góc với (α).

Bước 2: Xác định giao tuyến $d=(\alpha)\cap(\beta)$.

Bước 3: Trong mặt phẳng (β) kẻ $MH \perp d$. Vậy $MH = d(M,(\alpha))$.

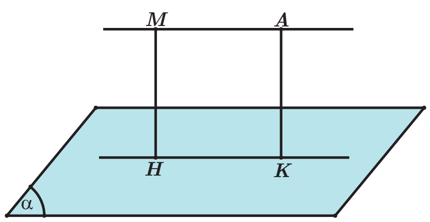


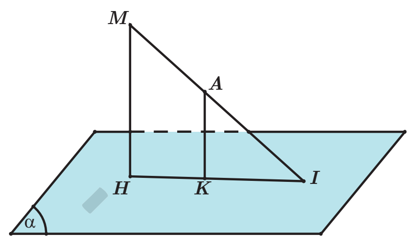
Phương pháp 2

Giả sử đã biết $d(A,(\alpha))$, IM và IA.

- Nếu $AM \parallel (\alpha)$ thì $d(M,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$.

- Nếu AM cắt (α) tại I thì $\dfrac{d(M,(\alpha))}{d(A,(\alpha))} = \dfrac{IM}{IA}$.



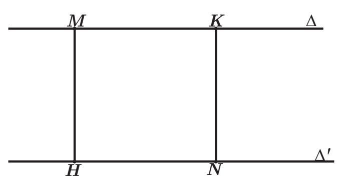


5.3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ':

- Nếu Δ và Δ' cắt nhau hoặc trùng nhau thì $d(\Delta,\Delta') = 0$.

- Nếu Δ và Δ' song song với nhau thì $d(\Delta,\Delta') = d(M,\Delta') = d(N,\Delta)$

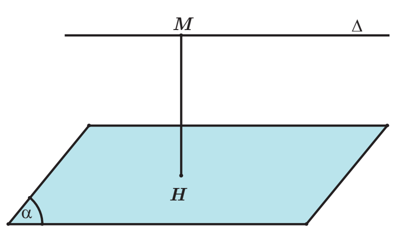


5.4 Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và (α):

- Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha)) = 0$.

- Nếu $\Delta \parallel (\alpha)$ thì $d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha))$.

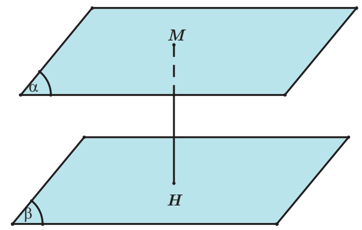


5.5 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

- Nếu (α) cắt (β) hoặc $(\alpha)\equiv(\beta)$ thì $d((\alpha),(\beta))=0$.

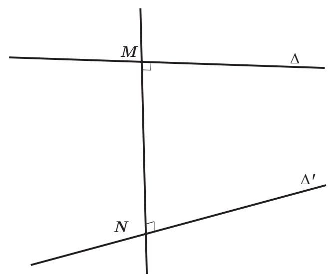
- Nếu $(\alpha)\,||\,(\beta)$ thì $d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))$.



5.6 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

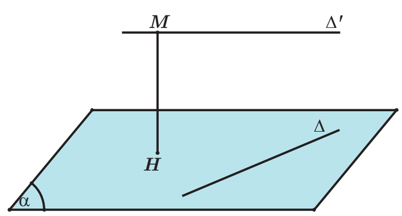
Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' là đường thẳng a cắt Δở M và cắt Δ' ở N đồng thời vuông góc với cả Δvà Δ'.

Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δvà Δ'.



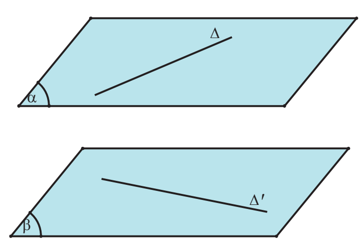
Phương pháp 1

Chọn mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'. Khi đó $d(\Delta,\Delta')=d(\Delta',(\alpha))$.



Phương pháp 2

Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.

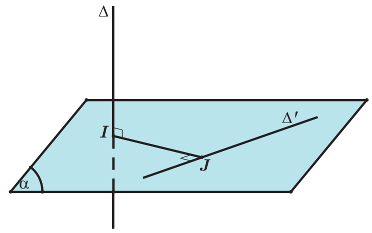


Phương pháp 3 Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Trường hợp 1: Δ và Δ' vừa chéo nhau vừa vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và vuông góc với Δtại I.

Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=IJ$.



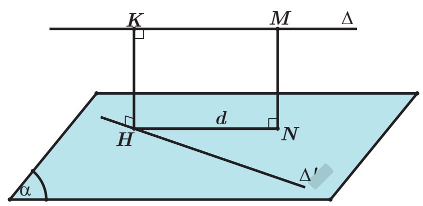
Trường hợp 2: Δ và Δ' chéo nhau mà không vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

Bước 2: Dựng d là hình chiếu vuông góc của Δ xuống (α) bằng cách lấy điểm $M\in\Delta$ dựng đoạn $MN\perp(\alpha)$, lúc đó d là đường thẳng đi qua N và song song với Δ.

Bước 3: Gọi $H=d\cap\Delta'$, dựng $HK \parallel MN$

Khi đó HK là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=HK=MN$.



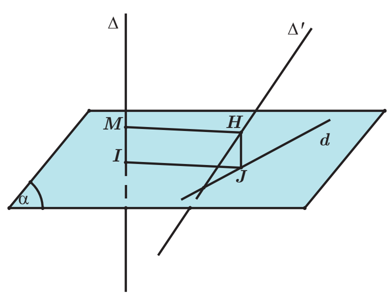
Hoặc

Bước 1: Chọn mặt phẳng $(\alpha)\perp\Delta$ tại I.

Bước 2: Tìm hình chiếu d của Δ' xuống mặt phẳng (α).

Bước 3: Trong mặt phẳng (α), dựng $IJ\perp d$, từ J dựng đường thẳng song song với Δ cắt Δ' tại H, từ H dựng $HM \parallel IJ$.

Khi đó HM là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=HM=IJ$.



6. Bài toán khác

DẠNG 1: ***Thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng d cho trước***

Cách xác định mp(α) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d:

Cách 1:

+ Kẻ đường thẳng a qua A và vuông góc với d.

Khi đó, mp(a,b) chính là mp(α) cần dựng.

Cách 2: Nếu có d vuông góc với (P). Dựng (α) qua A và $(\alpha)//(P)$

DẠNG 2: ***Thiết diện tạo bởi mặt phẳng chứa một đường thẳng và vuông góc một mặt phẳng cho trước.***

Cách xác định mp(α) chứa đường thẳng a và vuông góc với đường thẳng mp(β) trong đó ($a \perp mp(\beta)$):

+ Chọn một điểm A trên đường thẳng a.

+ Kẻ đường thẳng qua A và vuông góc với mp(β).

Khi đó, mp(a,b) chính là mp(α) cần dựng.

Kết quả:

+ Nếu một đường thẳng và một mp cùng vuông góc với một đường thẳng (đường thẳng không nằm trong mặt phẳng) thì song song.

+ Nếu một đường thẳng và một mp cùng vuông góc với mặt phẳng (đường thẳng không nằm trong mặt phẳng thì song song.

DẠNG 3: ***Dựng một đường thẳng d qua một điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P)***

Cách 1: Nếu có $a \perp (P)$: Dựng d song song với a. Khi đó $d \perp (P)$

Cách 2:

+ Dựng mặt phẳng (Q) qua điểm A và $(Q) \perp (P)$;

+ Tìm giao tuyến b của (P) và (Q);

+ Từ điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với b.

Khi đó: d là đường thẳng cần dựng

DẠNG 4: ***Chọn một mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước***

Cách 1: Nếu đã có một đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b trong (P).

Từ một điểm M nào đó trên a, kẻ một đường thẳng MH vuông góc với b.

Khi đó: mp(a,H) chính là mặt phẳng cần dựng.

Cách 2: Nếu biết mặt phẳng (Q) vuông góc với (P).

Từ điểm A kẻ lần lượt hai đường thẳng song song với hai đường thẳng cắt nhau trong (P).

DẠNG 5: ***Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng (P)***

Quy tắc chung:

+ Điểm thuộc mặt phẳng thì hình chiếu của điểm đó lên mặt phẳng là chính nó;

+ Điểm không thuộc mặt phẳng:

- Dựng một đường thẳng d qua điểm A và vuông góc với (P); - DẠNG 3

- Tìm giao điểm củaH của d và mặt phẳng (P). Khi đó, H chính là hình chiếu của điểm A lên (P)

DẠNG 6: ***Tìm hình chiếu của đường thẳng d (không vuông góc với (P)) lên mặt phẳng (P).***

Cách 1:

Chọn trên d hai điểm A & B. (nếu d cắt (P) nên chọn 1 điểm là giao của d và (P))

+ Tìm hình chiếu A’, B’ lần lượt của A, B lên (P).

+ Đường thẳng d’ qua A’, B’ chính là hình chiếu của d lên (P)

Cách 2:

+ Chọn mặt phẳng (Q) chứa d và $\left(Q\right) \perp (\mathrm{P})$;

+ Khi đó, giao tuyến d’ của (P) và (Q) chính là hình chiếu của d lên (P).

DẠNG 7: ***Tỉ sốkhoảng cách***

+ Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại M thì: $\dfrac{d(A,(P))}{d(\mathrm{B},(P))} = \dfrac{AM}{BM}$

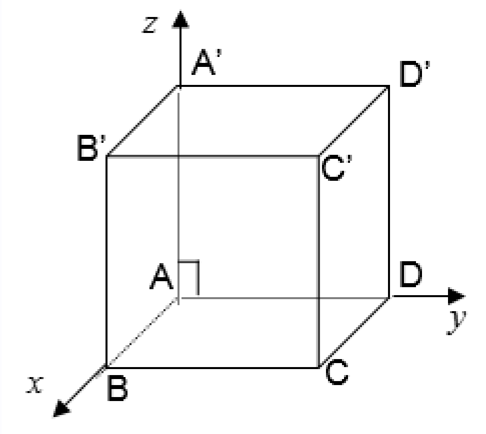
+ Nếu AB song song với (P) thì $d(A,(P)) = d(\mathrm{B},(P))$.

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz trong không gian

Ta có: Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Do đó, nếu hình vẽ bài toán cho có chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các cạnh đó làm trục tọa độ. Cụ thể:

1. Với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’



Với hình lập phương

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

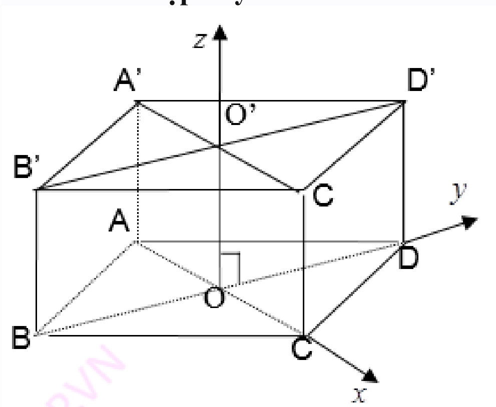
A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; a; 0); D(0; a; 0)
A’(0; 0; a); B’(a; 0; a); C’(a; a; 0); D’(0; a; a)

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; b; 0); D(0; b; 0)
A’(0; 0; c); B’(a; 0; c); C’(a; b; c); D’(0; b; c)

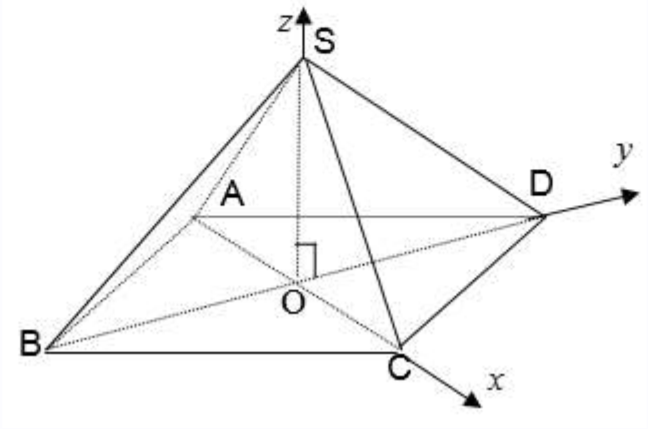
2. Với hình hộp đáy là hình thoi ABCD.A’B’C’D’



Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

- Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi ABCD
- Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

3. Với hình chóp tứ giác đều S.ABCD

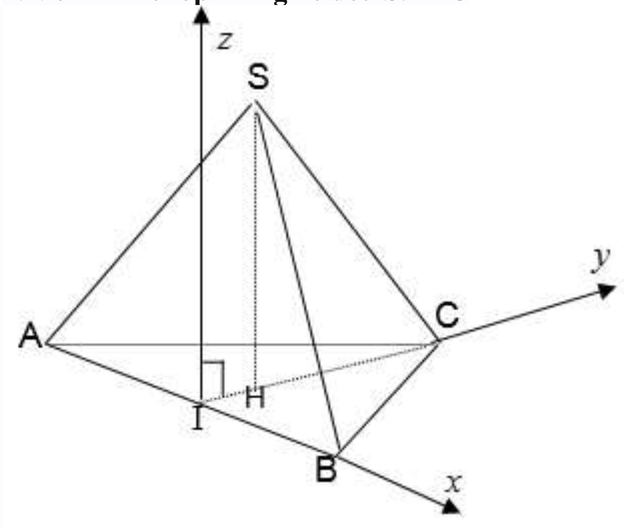


Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ
Giả sử cạnh hình vuông bằng a và đường cao SO = h
Chọn O(0;0;0) là tâm của hình vuông
Khi đó

$A(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0);\quad C(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0);\quad ;B(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0);\quad D(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$

$S(0;0;h)$

4. Với hình chóp tam giác đều S.ABC



cách 1: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ
Giả sử cạnh tam giác đều bằng a và đường cao bằng h. Gọi I là trung điểm của BC
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho I(0;0;0)
Khi đó:

$A(-\frac{a}{2};0;0);B(\frac{a}{2};0;0)$

$C(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0);S(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h)$

cách 2: chọn H trùng với gốc tọa độ O

tính $CI=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{a\sqrt{3}}{2} => CH=\frac{a\sqrt{3}}{3}, HI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ => suy ra dc tọa độ các đỉnh

$A(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0xy;B(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0xy,C(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0)\in oy;$

$S(0;-\frac{a\sqrt{3}}{6};h)\in 0yz;I(0;-\frac{a\sqrt{3}}{6};0)\in 0y$

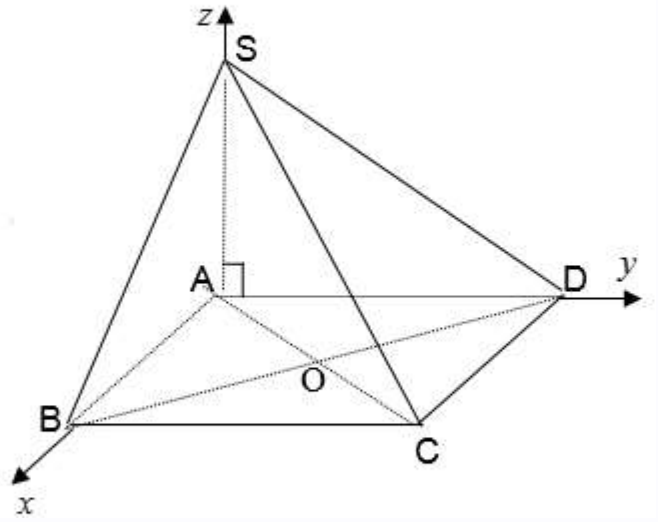
cách 3: từ A ta dựng đường thẳng Az // SH, Ax // BC
chọn hệ trục sao cho A= O (0;0;0),

$B(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0) \in 0xy;$

$C(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0) \in 0xy,$

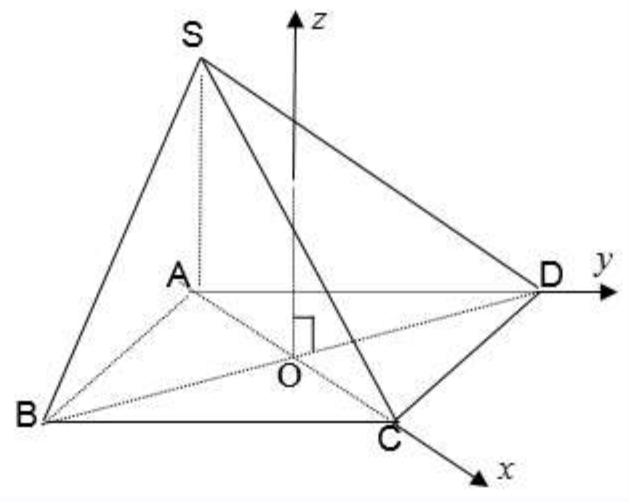
$S(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h) \in oz$

5. Với hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật và SA ⊥ (ABCD)



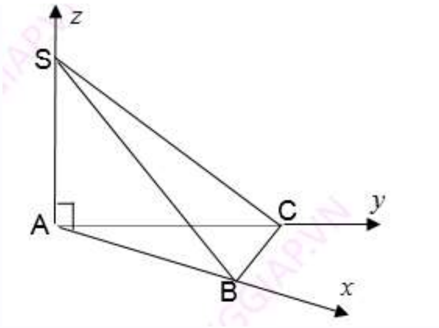
ABCD là hình chữ nhật AB = a; AD = b và chiều cao bằng h
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)
Khi đó: B(a;0;0); C(a;0;0); D(0;b;0); S(0;0;h)

6. Với hình chóp S.ABC có ABCD là hình thoi và SA ⊥ (ABCD)



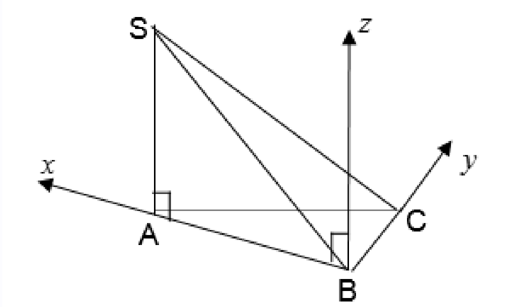
ABCD là hình thoi cạnh a và chiều cao bằng h
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho O(0;0;0)

7. Với hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và Δ ABC vuông tại A



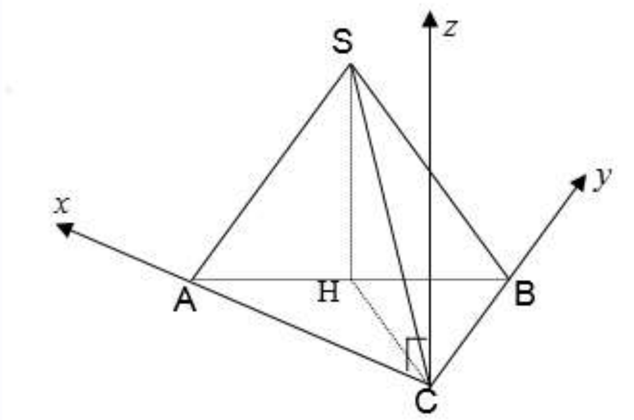
Tam giác ABC vuông tại A có AB = a; AC = b đường cao bằng h.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)
Khi đó: B(a;0;0); C(0;b;0); S(0;0;h)

8. Với hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và Δ ABC vuông tại B



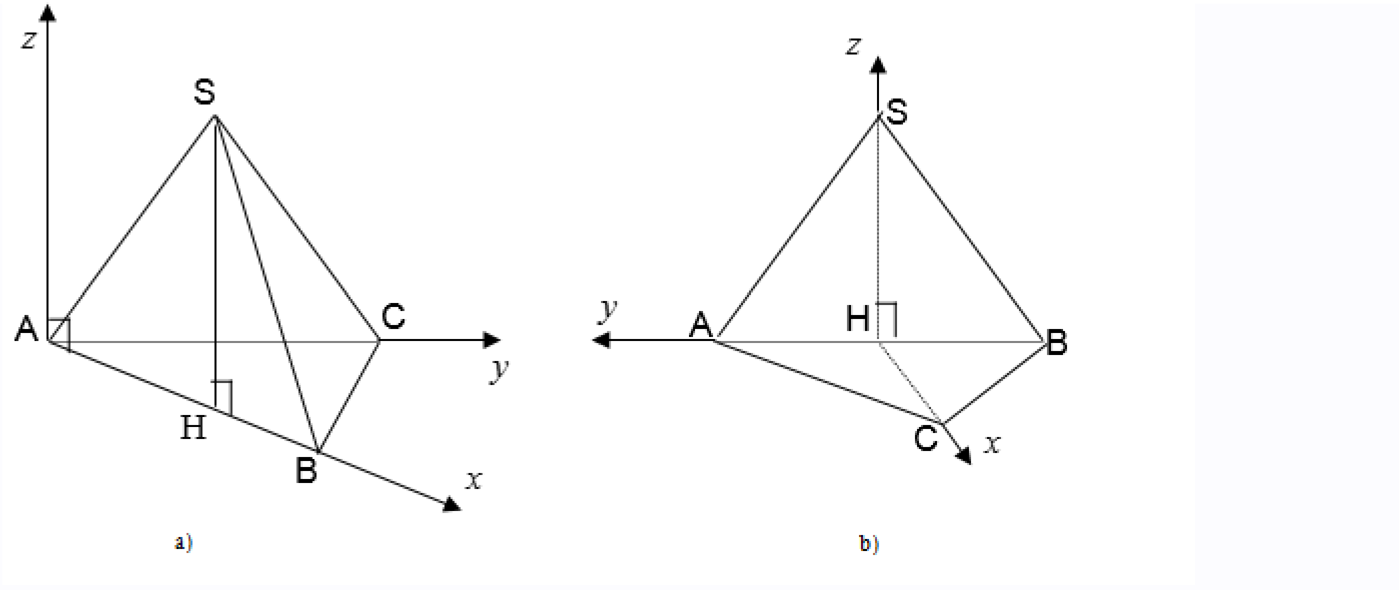
Tam giác ABC vuông tại B có BA = a; BC = b đường cao bằng h.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho B(0;0;0)
Khi đó: A(a;0;0); C(0;b;0); S(a;0;h)

9. Với hình chóp S.ABC có (SAB) ⊥ (ABC), Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại C



ΔABC vuông tại C với CA = a; CB = b và chiều cao bằng h
H là trung điểm của AB
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho C(0;0;0)
Khi đó: A(a; 0; 0); B (0; b;0); S(a/2; b/2; h)

10. Với hình chóp S.ABC có (SAB) ⊥ (ABC), Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại A



hình a)

ΔABC vuông tại A: AB = a; AC = b và chiều cao bằng h

H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)

Khi đó: B(a;0;0); C(0;b;0); S(0; a/2; h)

hình b)

Tam giác ABC vuông cân tại C có

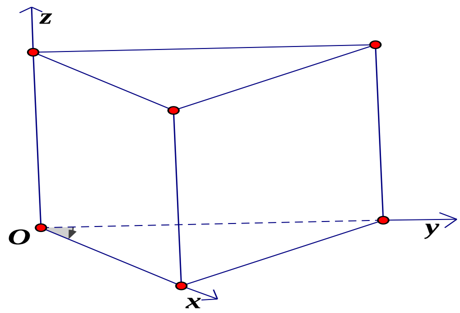
CA = CB = a đường cao bằng h.

H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho H(0;0;0)

Khi đó: $A(0;\frac{a}{\sqrt{2}};0),\quad B(0,-\frac{a}{\sqrt{2}};0);\quad C(\frac{a}{\sqrt{2}};0;0)\quad S(0;0;h)$

11.Hình lăng trụ có đáy là tam giác vuông tại O



<u>Bước 2: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán:</u>

Các dạng câu hỏi thường gặp

1.khoảng cách giữa 2 điểm : (ý phụ)

◇ Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ là:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

2.khoảng cách từ điểm đến đoạn thẳng:

◇ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)

Cách 1:(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Cách 2: Phương

pháp :

- Lập ptmp(α)đi qua M vàvuông gócvới (d)
- Tìm tọa độ giao điểm H của mp(α) và d
- d(M, d) =MH

3. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

◇ Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α): Ax+By+Cz+D=0 cho bởi côngthức

$$d(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4.khoảng cách giữa 2 mặt phẳng //:

Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

5.khoảng cách giữa 2 đường thẳng

A, Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

◇ **Cách 1:** (d) điqua $M(x_0;y_0;z_0)$;cóvtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(d')quaM'$(x'_0;y'_0;z'_0)$

$$d(d,d')=\frac{\left|[\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{a}']\right|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}$$

◇ **Cách 2**:

d điqua $M(x_0;y_0;z_0)$;có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

d'quaM'$(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\overrightarrow{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

Phương pháp :

- Lập ptmp(α)chứa d và songsong với d'

d(d,d')= d(M',(α))

ĐẶC BIỆT: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD khi biết tọa độ của chúng $d(AB,CD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$

B. khoảng cách giữa 2 đường thẳng //:

-Khoảng cách giữa 2 đường thẳng // bằng khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia => quay về dạng toán khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng ☺

6. góc giữa 2 đường thẳng

◇ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua M'$(x'_0;y'_0;z'_0)$ có VTCP $\overrightarrow{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{a}')\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a}'\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}'\right|}=\frac{|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

7.góc giữa 2 mặt phẳng

◇ Gọiφ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0\le\varphi\le90^0$)

(P):Ax+By+Cz+D=0 và (Q):A'x+B'y+C'z+D'=0

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

8.góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

(Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mp(α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mp(α)

$$\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

9. diện tích thiết diện

◇ Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$

◇ Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\right|$

10.thể tích khối đa diện

- Thểtích chóp: Vchóp $=\frac{1}{3}S_{đáy}.h$ Hoặc $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$ (nếu biết hết tọa độ các đỉnh)
- Thể tích khối hộp:

$V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC BỔ XUNG

1. Dấu hiệu nhận biết các hình:

1): Dấu hiệu nhận biết hình thang, hình thang vuông, hình thang cân:
- Tứ giác có hai cạnh đối song song.
- Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông
- Hình thang có hai góc kề một đáy là hình thang cân
- Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình thang cân
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân

2): Dấu hiệu nhận biết hình bình hành (Có 5 dấu hiệu nhận biết):
- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song
- Tứ giác có các cặp cạnh đối bằng nhau
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗ đươ ng.

3): Hình chữ nhật (có 4 dấu hiệu nhận biết):
- Tứ giác có 3 góc vuông
- Hình thang cân có một gócvuông
- Hình bình hành có một góc vuông
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau

4): Hình thoi (có 4 dấu hiệu nhận biết):
- Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau
- Hình bình hành cá hai cạnh kề bằng nhau
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nhau
- Hình bình hành có 1 đường chéo là đường phân giác cùa 1 góc.

5): Hình vuông (có 5 dấu hiệu nhận biết):
- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc
- Hình chứ nhật có đường chéo là đường phân giác của một góc
- Hình thoi có một góc vuông
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

II: Bài tập vận dụng:

Dạng 1: Hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’